หนังสือเรียน รายวิชาบังคับ

รายวิชา คณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พค31001)

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ กระทรวงศึกษาธิการ
เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 8/2555

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน

รายวิชา คณิตศาสตร์

พค31001

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

พุทธศักราช 2551

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ

กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 8/2555

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน

รายวิชา คณิตศาสตร์ พค31001

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560

เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 8/2555

คำนำ

กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศใช้หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เมื่อวันที่ 18 กันยายน พ.ศ. 2551 แทนหลักเกณฑ์และวิธีการจัดการศึกษานอกโรงเรียนตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งเป็นหลักสูตรที่พัฒนาขึ้นตามหลักปรัชญาและความเชื่อพื้นฐานในการจัดการศึกษานอกโรงเรียนที่มีกลุ่มเป้าหมายเป็นผู้ใหญ่มีการเรียนรู้และสั่งสมความรู้และประสบการณ์อย่างต่อเนื่อง

ในปีงบประมาณ 2554 กระทรวงศึกษาธิการได้กำหนดแผนยุทธศาสตร์ในการขับเคลื่อนนโยบายทางการศึกษาเพื่อเพิ่มศักยภาพและขีดความสามารถในการแข่งขันให้ประชาชนได้มีอาชีพที่สามารถสร้างรายได้ที่มั่งคั่งและมั่นคง เป็นบุคลากรที่มีวินัย เปี่ยมไปด้วยคุณธรรมและจริยธรรมและมีจิตสำนึกรับผิดชอบต่อตนเองและผู้อื่น สำนักงาน กศน. จึงได้พิจารณาทบทวนหลักการ จุดหมาย มาตรฐาน ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง และเนื้อหาสาระ ทั้ง 5 กลุ่มสาระการเรียนรู้ ของหลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ให้มีความสอดคล้องตอบสนองนโยบายกระทรวงศึกษาธิการ ซึ่งส่งผลให้ต้องปรับปรุงหนังสือเรียน โดยการเพิ่มและสอดแทรกเนื้อหาสาระเกี่ยวกับอาชีพ คุณธรรม จริยธรรมและการเตรียมพร้อม เพื่อเข้าสู่ประชาคมอาเซียน ในรายวิชาที่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน แต่ยังคงหลักการและวิธีการเดิมในการพัฒนาหนังสือที่ให้ผู้เรียนศึกษาค้นคว้าความรู้ด้วยตนเอง ปฏิบัติกิจกรรม ทำแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความรู้ความเข้าใจ มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับกลุ่ม หรือศึกษาเพิ่มเติมจากภูมิปัญญาท้องถิ่น แหล่งการเรียนรู้และสื่ออื่น

การปรับปรุงหนังสือเรียนในครั้งนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิในแต่ละสาขาวิชา และผู้เกี่ยวข้องในการจัดการเรียนการสอนที่ศึกษาค้นคว้า รวบรวมข้อมูลองค์ความรู้จากสื่อต่าง ๆ มาเรียบเรียงเนื้อหาให้ครบถ้วนสอดคล้องกับมาตรฐาน ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ตัวชี้วัดและกรอบเนื้อหาสาระของรายวิชา สำนักงาน กศน.ขอขอบคุณผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านไว้ ณ โอกาสนี้ และหวังว่าหนังสือเรียน ชุดนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียน ครู ผู้สอน และผู้เกี่ยวข้องในทุกระดับ หากมีข้อเสนอแนะประการใด สำนักงาน กศน. ขอน้อมรับด้วยความขอบคุณยิ่ง

(นายประเสริฐ บุญเรือง)
เลขาธิการ กศน.
พฤศจิกายน 2554

สารบัญ

คำแนะนำการใช้แบบเรียน

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชา คณิตศาสตร์ (พค 31001) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นหนังสือเรียนที่จัดทำขึ้น สำหรับผู้เรียนที่เป็นนักศึกษานอกระบบ

ในการศึกษาหนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน รายวิชา คณิตศาสตร์ ผู้เรียนควรปฏิบัติดังนี้

1. ศึกษาโครงสร้างรายวิชาให้เข้าใจในหัวข้อสาระสำคัญ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังและขอบข่ายเนื้อหา
2. ศึกษารายละเอียดเนื้อหาของแต่ละบทอย่างละเอียด และทำกิจกรรมตามที่กำหนด แล้วตรวจสอบกับแนวตอบกิจกรรมที่กำหนด ถ้าผู้เรียนตอบผิดควรกลับไปศึกษาและทำความเข้าใจในเนื้อหานั้นใหม่ให้เข้าใจก่อนที่จะศึกษาเรื่องต่อไป
3. ปฏิบัติกิจกรรมท้ายเรื่องของแต่ละเรื่อง เพื่อเป็นการสรุปความรู้ความเข้าใจของเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ อีกครั้ง และการปฏิบัติกิจกรรมของแต่ละเนื้อหาในแต่ละเรื่อง ผู้เรียนสามารถนำไปตรวจสอบกับครูและเพื่อน ๆ ที่ร่วมเรียนในรายวิชาและระดับเดียวกันได้

แบบเรียนเล่มนี้มี 9 บท คือ

โครงสร้างรายวิชาคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สาระสำคัญ

มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนและตัวเลข เศษส่วน ทศนิยมและร้อยละ การวัด เรขาคณิต สถิติ และความน่าจะเป็นเบื้องต้น

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. ระบุหรือยกตัวอย่างเกี่ยวกับจำนวนและตัวเลข เศษส่วน ทศนิยมและร้อยละ การวัด เรขาคณิต สถิติ และความน่าจะเป็นเบื้องต้นได้
2. สามารถคิดคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนนับเศษส่วน ทศนิยม ร้อยละ การวัด เรขาคณิตได้

ขอบข่ายเนื้อหา

บทที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

บทที่ 2 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทที่ 3 เซต

บทที่ 4 การให้เหตุผล

บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกนมิติและการนำไปใช้

บทที่ 6 การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

บทที่ 7 สถิติเบื้องต้น

บทที่ 8 ความน่าจะเป็น

บทที่ 9 การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

สื่อการเรียนรู้

1. ใบงาน
2. หนังสือเรียน

บทที่ 1

จำนวนและการดำเนินการ

สาระสำคัญ

1. โครงสร้างของจำนวนจริงประกอบไปด้วย จำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ และจำนวนเต็ม
2. สมบัติของจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ประกอบไปด้วยสมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่ การมีอินเวอร์ส การมีเอกลักษณ์และสมบัติการแจกแจง
3. สมบัติการเท่ากันจะใช้เครื่องหมาย “=” แทนการมีค่าเท่ากัน
4. สมบัติการไม่เท่ากันจะใช้เครื่องหมาย “$\neq$, <, >, $\leq$, $\geq$”
5. ค่าสัมบูรณ์ใช้สัญลักษณ์ “| |” แทนค่าสัมบูรณ์ซึ่ง

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงได้
2. อธิบายความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริงได้
3. อธิบายสมบัติของจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากัน การไม่เท่ากัน และนำไปใช้ได้
4. อธิบายเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงและหาค่าสมบูรณ์ของจำนวนจริงได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ของระบบจำนวนจริง

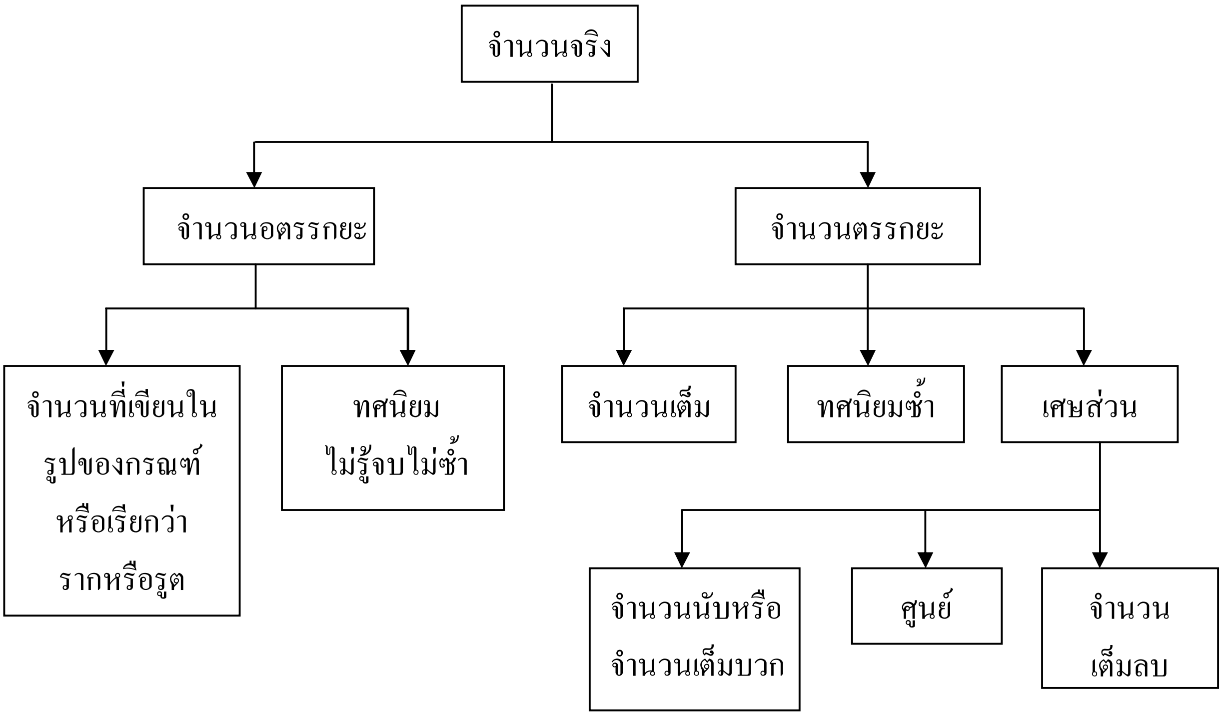
เรื่องที่ 2 สมบัติของการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริง

เรื่องที่ 3 สมบัติการไม่เท่ากัน

เรื่องที่ 4 ค่าสัมบูรณ์

เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ของระบบจำนวนจริง

1.1. โครงสร้างของจำนวนจริง



จำนวนจริง (Real number) ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

1. จำนวนตรรกยะ (Rational number) ประกอบด้วย จำนวนเต็ม ทศนิยมซ้ำ และเศษส่วน

1. จำนวนเต็ม ซึ่งแบ่งเป็น 3 ชนิด คือ

1.1 จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือจำนวนนับ (N)

$\therefore\ I^+ = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

1.2 จำนวนเต็มศูนย์ มีจำนวนเดียว คือ {0}

1.3 จำนวนเต็มลบ (I^-)

$\therefore\ I^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

2. เศษส่วน เช่น $\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{7}$ เป็นต้น

3. ทศนิยมซ้ำ เช่น $0.\dot{6}$, $0.\dot{1}\dot{2}$, $0.5\dot{3}\dot{2}$

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น $\sqrt{2}$ มีค่าเท่ากับ 1.414213…

$\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับ 1.7320508…

π มีค่าเท่ากับ 3.14159265…

0.1010010001… มีค่าประมาณ 1.101

แบบฝึกหัดที่ 1

1.จำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้จำนวนใดเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

ข้อ	จำนวนจริง	จำนวนนับ	จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ
1)	$-9,-\frac{7}{2},5\frac{2}{3},\sqrt{2},0,1$				
2)	$\sqrt{5},-7\frac{7}{3},3,12,\frac{5}{4}$				
3)	2.01,0.666...,-13 ,				
4)	2.3030030003...,				
5)	$-\pi,-\frac{1}{3},\frac{6}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},-7.5$				
6)	$25,-17,-\frac{12}{5},\sqrt{9},3,12,\frac{1}{2}\pi$				

2. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) 0.001001001001…เป็นจำนวนตรรกยะ

2) 0.110110110110… เป็นจำนวนตรรกยะ

3) 0.767667666766667… เป็นจำนวนตรรกยะ

4) 0.59999…. เป็นจำนวนตรรกยะ

5) 0 เป็นจำนวนจริง

6) จำนวนที่เขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

2. สมบัติการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนจริง

สมบัติของจำนวนจริง คือ การนำจำนวนจริงใด ๆ มากระทำต่อกันในลักษณะ เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร หรือกระทำด้วยลักษณะพิเศษที่กำหนดขึ้น แล้วมีผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในลักษณะหรือทำนองเดียวกัน สมบัติที่ใช้ในการบวก การลบ การคูณ และการหาร มีดังนี้

2.1 สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

สมบัติการสะท้อน	$a = a$
สมบัติการสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
สมบัติการถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

2.2 สมบัติการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง เมื่อกำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

2.2.1 สมบัติการบวก

สมบัติปิด	ถ้า $a \in$ R และ b $\in$ R แล้ว $a + b \in$ R
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$a + (b + c) = (a + b) + c$
สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก คือ 0	$0 + a = a + 0 = a$
สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก	a มีอินเวอร์สการบวก คือ $-a$ และ $-a$ มีอินเวอร์สการบวก คือ a จะได้ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ นั่นคือจำนวนจริง a จะมี $-a$ เป็นอินเวอร์สของการบวก

2.2.2 สมบัติการคูณ

สมบัติปิด	ถ้า $a \in$ R และ b $\in$ R แล้ว $ab \in$ R
สมบัติการสลับที่	$ab = ba$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$a(bc) = (ab)c$
สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก คือ 1	$1.\ a = a.1 = a$
สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ (ยกเว้น 0 เพราะ $\frac{1}{0}$ ไม่มีความหมาย)	a มีอินเวอร์สการคูณ คือ $\frac{1}{a}$ และ $\frac{1}{a}$ มีอินเวอร์สการคูณ คือ a

	จะได้ $a\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)a=1$; $a\neq 0$ นั่นคือ จำนวนจริง a จะมี $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ
สมบัติการแจกแจง	$a(b+c)=ab+ac$ $(b+c)a=ba+ca$

จากสมบัติของจำนวนจริงสามารถใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบทที่ 1 กฎการตัดออกสำหรับการบวก

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า a + c = b + c แล้ว a = b

ถ้า a + b = a + c แล้ว b = c

ทฤษฎีบทที่ 2 กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า ac = bc และ c $\neq$ 0 แล้ว a = b

ถ้า ab = ac และ a $\neq$ 0 แล้ว b = c

ทฤษฎีบทที่ 3 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

a · 0 = 0

0 · a = 0

ทฤษฎีบทที่ 4 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(-1)a = -a

a(-1) = -a

ทฤษฎีบทที่ 5 เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า ab = 0 แล้ว a = 0 หรือ b = 0

ทฤษฎีบทที่ 6 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

a(-b) = -ab

(-a)b = -ab

(-a)(-b) = ab

การลบและการหารจำนวนจริง

• การลบจำนวนจริง

บทนิยาม เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$a - b = a + (-b)$$

นั่นคือ a - b คือ ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b

• การหารจำนวนจริง

บทนิยาม เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เมื่อ $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1})$$

นั่นคือ $\frac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b

แบบฝึกหัดที่ 2

1. ให้ผู้เรียนเติมช่องว่างโดยใช้สมบัติการเท่ากัน

1. ถ้า a = b แล้ว a +5 = ……………………………………………………...……………
2. ถ้า a = b แล้ว -3a = ………………………………………………………………...…
3. ถ้า a + 4 = b + 4 แล้ว a =……………………………………………………..…………
4. ถ้า a +1 = b +2 และ b +2 = c -5 แล้ว a +1…………………………………..…...………
5. ถ้า $x^2+2x+1=(x+1)^2$ แล้ว $(x+1)^2=$……………………………………………
6. ถ้า $x=\frac{3}{2}y$ แล้ว 2x = ……………………………………………………..…………
7. ถ้า $x^2+1=2x$ แล้ว $(x-1)^2=$ ……………………………………………..…..………
8. ถ้า $ab=a+b$ แล้ว $\frac{1}{2}(ab)=$ …………………………………………..………….

2. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงบอกว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงตามสมบัติใด

1) 3 + 5 = 5 + 3
2) (1+2)+3 = 1+(2+3)
3) (-9)+5 = 5 +(-9)
4) (8 X 9) เป็นจำนวนจริง
5) 5 X 3 = 15 = 3 X 5
6) 2(a+b) = 2a +2b
7) (a + b) + c = a+(b + c)
8) 9a +2a = 11 a = 2a + 9a
9) 4 X (5 + 6) = (4 X 5) + (4 X 6)
10) c(a +b) = ac +bc

3 . เซตที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีหรือไม่มีสมบัติปิดของการบวกหรือสมบัติปิดของการคูณ

1) { 1 , 3 , 5 }
2) { 0 }
3) เซตของจำนวนจริง
4) เซตของจำนวนตรรกยะ
5) เซตของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

4. จงหาอินเวอร์สการบวกของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) อินเวอร์สการบวกของ 8

2) อินเวอร์สการบวกของ - 5

3) อินเวอร์สการบวกของ - 0.567

4) อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

5) อินเวอร์สการคูณของ $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

3. สมบัติการไม่เท่ากัน

ให้ผู้เรียนทบทวนเรื่องสมบัติการเท่ากันในเรื่องที่ผ่านมาเพื่อเป็นความรู้เพิ่มเติม ส่วนในเรื่องนี้จะเน้นเรื่องสมบัติการไม่เท่ากันเท่านั้น

ประโยคคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์ $>, <, \geq, \leq, \neq$ แทนการไม่เท่ากัน เรียกการไม่เท่ากันว่า "**อสมการ**" (Inequalities)

บทนิยาม $a < b$ หมายถึง a น้อยกว่า b

$a > b$ หมายถึง a มากกว่า b

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. จำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ
   a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$
   a เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$
4. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากันที่ไม่เท่ากับศูนย์
   กรณีที่ 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
   กรณีที่ 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$
6. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ
   กรณีที่ 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$
   กรณีที่ 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

บทนิยาม

$a \leq b$	หมายถึง	a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
$a \geq b$	หมายถึง	a มากกว่าหรือเท่ากับ b
$a < b < c$	หมายถึง	$a < b$ และ $b < c$
$a \leq b \leq c$	หมายถึง	$a \leq b$ และ $b \leq c$

ช่วง (Interval)

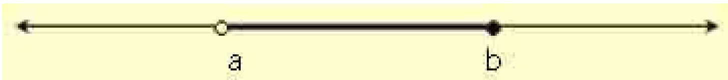
ช่วง หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่เป็นส่วนใดส่วนหนึ่งของเส้นจำนวน

3.1 **ช่วงของจำนวนจริง** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ช่วงเปิด (a, b) $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$

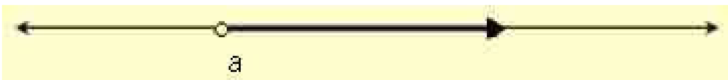
2. ช่วงปิด [a, b] $[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

3. ช่วงครึ่งเปิด (a, b] $(a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$



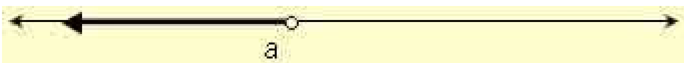
4. ช่วงครึ่งเปิด [a, b) $[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$

5. ช่วง (a, ∞) $(a, \infty) = \{ x \mid x > a \}$



6. ช่วง $[a, \infty)$ $[a, \infty) = \{ x \mid x \geq a \}$

7. ช่วง $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{ x \mid x < a \}$



8. ช่วง $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{ x \mid x \leq a \}$

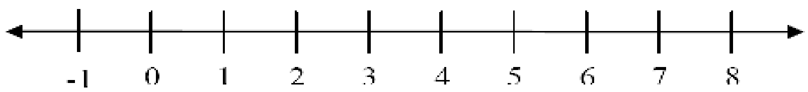
แบบฝึกหัดที่ 3

1. ให้ผู้เรียนบอกสมบัติการไม่เท่ากัน (เมื่อตัวแปรเป็นจำนวนจริงใดๆ)

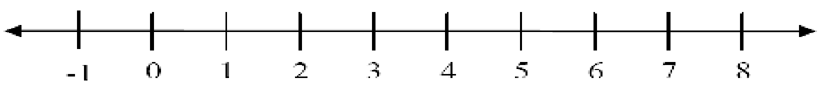
1. ถ้า x < 3 แล้ว 2x <6 ……………………………………………………………..
2. ถ้า y>7 แล้ว -2y < 14 ……………………………………………………………..
3. ถ้า x+1 > 6 แล้ว x+2 > 7 ………………………………………………………..
4. ถ้า y+3 < 5 แล้ว y< 2 ……………………………………………………………
5. ถ้า x< 7 และ 7< y แล้ว x<y …………………………………………………….
6. ถ้า a > 0 แล้ว a+1 > 0 +1 ………………………………………………………….
7. ถ้า b< 0 แล้ว b + (-2) < 0+(-2) …………………………………………………
8. ถ้า c> -2 แล้ว (-1)c < (-1)(-2) ……………………………………………………

2. จงใช้เส้นจำนวนแสดงลักษณะของช่วงของจำนวนจริงต่อไปนี้

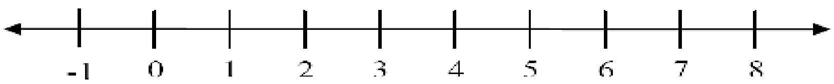
1) (2,7)



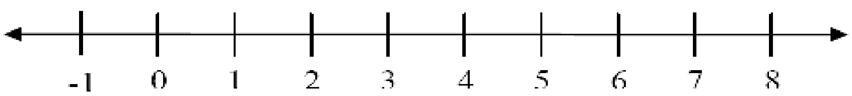
2) [3,6]



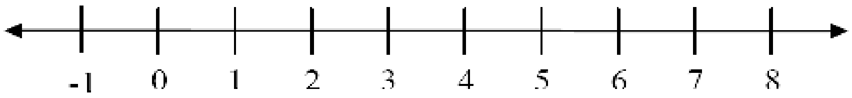
3) [-1,5)



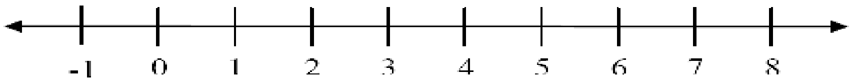
4) (-1,4]



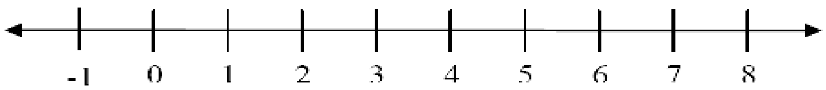
5) $(2, \infty)$



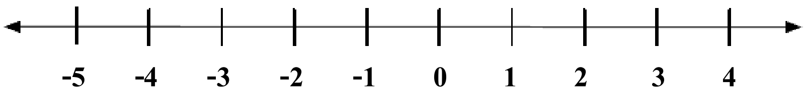
6) $(-\infty, 4)$



7) $(0,8)$

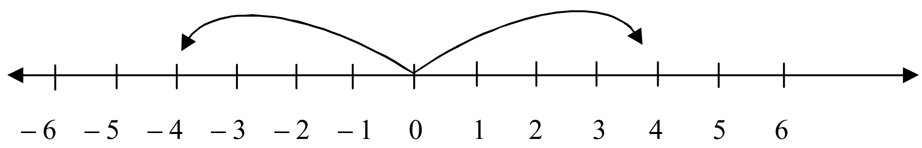


8) $[-5,4)$



4. ค่าสมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง หมายถึง ระยะห่างจากจุดศูนย์บนเส้นจำนวน พิจารณาค่าสัมบูรณ์ของ 4 และ -4



4 อยู่ห่างจาก 0 4 หน่วย ค่าสัมบูรณ์ของ 4 คือ 4

-4 อยู่ห่างจาก 0 4 หน่วย ค่าสัมบูรณ์ของ -4 คือ 4

นั่นคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

สัญลักษณ์แทนค่าสัมบูรณ์คือ | | เช่น ค่าสัมบูรณ์ของ 4 คือ |4| ค่าสัมบูรณ์ของ – 4 คือ |-4|

บทนิยาม กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a \text{ เมื่อ } a > 0 \\ 0 \text{ เมื่อ } a = 0 \\ -a \text{ เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

4.1 สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
4. $|x - y| = |y - x|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
   - 6.1 ถ้า $xy > 0$ แล้ว $|x + y| = |x| + |y|$
   - 6.2 ถ้า $xy < 0$ แล้ว $|x + y| < |x| + |y|$
7. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

   $|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$

   $|x| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$
8. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

   $|x| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$

   $|x| \geq a$ หมายถึง $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

แบบฝึกหัดที่ 4

1) $|X| \geq 2$

$X \leq -2$ หรือ $X \geq -2$

เซตคำตอบของอสมการ คือ ....

2) $|X| < 3$

$-3 < X < 3$

เซตคำตอบของอสมการ คือ..

3) $|X - 4| < 3$

จะได้ $-3 < X - 4 < 3$

$-3 + 4 < X < 3 + 4$

$1 < X < 7$

เซตคำตอบของอสมการ คือ..

4) $|2 - X| \geq 3$

จะได้ $2 - X \leq -3$ หรือ $2 - X \geq 3$

$-X \leq -3 -2$ หรือ $-X \geq -3 -2$

$-X \leq -5$ หรือ $-X \geq 1$

$-X \geq 5$ หรือ $X \leq -1$

เซตคำตอบของอสมการ คือ..

5). $|5 - X| > 0$

....
....
....
....

6). $|5 - X| \leq 0$

....
....
....
....

7). $|2X - 9| \leq 1$

....
....
....
....

8). $|3X - 4| < 8$

....
....
....
....

9). $|6 - 3X| \leq 0$

....
....
....
....

10). $|12 - 4X| > 0$

....
....
....
....

บทที่ 2
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

สาระสำคัญ

1. a^n อ่านว่า a ยกกำลัง n โดยมี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง
2. $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ a หรืออ่านว่า รากที่ n ของ a
3. จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของกรณฑ์หรือ ราก (root) ตามความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

   $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ และ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
4. การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะโดยใช้บทนิยามการบวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังของจำนวนเต็ม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายความหมายและบอกความแตกต่างของจำนวนตรรกยะและอตรรกยะได้
2. อธิบายเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ได้
3. อธิบายความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 จำนวนตรรกยะและอตรรกยะ

เรื่องที่ 2 จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

เรื่องที่ 3 การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

เรื่องที่ 1 จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

1.1 จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่เขียนแทนในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ตัวอย่าง จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ เช่น จำนวนเต็ม , เศษส่วน , ทศนิยมซ้ำ เป็นต้น

1.2 จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ $b \neq 0$ จำนวนอตรรกยะประกอบด้วยจำนวนต่อไปนี้ เป็นทศนิยมแบบไม่ซ้ำ เช่น 1.235478936... 5.223322233322223333...

ความแตกต่างระหว่างจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

จำนวน	ความแตกต่าง			
	จำนวนเต็ม	**เศษส่วน**	**ทศนิยม**	**ค่าทางพีชคณิต**
ตรรกยะ	มี	มี	- ทศนิยมรู้จบ - ทศนิยมรู้จบแบบซ้ำ	- ค่าทางพีชคณิตที่หาค่าได้ลงตัว หรือได้คำตอบเป็นเศษส่วน
อตรรกยะ	ไม่มี	ไม่มี	- ทศนิยมไม่รู้จบ	- ค่าทางพีชคณิตที่มีค่าเฉพาะ เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e$ เป็นต้น

1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

<u>นิยามเลขยกกำลัง</u> a^n หมายถึง $\underbrace{a \times a \times a \times a \ldots\ldots \times a}_{n \text{ ตัว}}$

เมื่อ a เป็นจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง ที่มี a เป็น ฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

เช่น $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงใด m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้กฎของการยกกำลัง ดังนี้

กฎข้อที่ 1 $a^m \cdot b^n = a^{m+n}$

กฎข้อที่ 2 $(ab)^n = a^n b^n$

กฎข้อที่ 3 $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

กฎข้อที่ 4 เมื่อ $x \neq 0$

$$\frac{a^m}{b^n} = 1 \quad \text{ถ้า } m = n$$

$$= a^{m-n} \quad \text{ถ้า } m > n$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{ถ้า } n > m$$

กฎข้อที่ 5 เมื่อ $y \neq 0$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

นิยาม $a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

นิยาม $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงบอกฐานและเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) 6^3 ฐานคือ.................................เลขชี้กำลังคือ..............................

2) $(1.2)^{-5}$ ฐานคือ..............................เลขชี้กำลังคือ..............................

3) $(-5)^0$ ฐานคือ..............................เลขชี้กำลังคือ................................

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ฐานคือ.................................เลขชี้กำลังคือ..............................

2. จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) $(-4)^5$ = ……………………….

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ = ………………………..….

3) $(1.2)^3$ = ………………………….

4) $\left(\sqrt{3}\right)^6$ = ………………………….

3. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1) $\left(a^2\right)^4$ = ………………………….

2) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^3\right)^4$ = ………………………….

3) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^5$ = ………………………….

4) $\left((1.1)^5\right)^3$ = ………………………….

5) $\left(x^{-2}\right)^{-5}$ = ………………………….

เรื่องที่ 2 จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

การเขียนเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะสามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่อง รากที่ n ของจำนวนจริง a (ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$) และมีบทนิยามดังนี้

นิยาม	ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
	a และ b เป็นจำนวนจริง
	a เป็นรากที่ n ของ b ก็ต่อเมื่อ $a^n = b$

ตัวอย่าง

$a = \sqrt[n]{b}$	ก็ต่อเมื่อ	$a^n = b$
$2 = \sqrt[3]{8}$	ก็ต่อเมื่อ	$2^3 = 8$
$-3 = \sqrt[5]{-243}$	ก็ต่อเมื่อ	$(-3)^5 = -243$

ลองทำดู

$\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3}$ 3 เป็นรากที่ 2 ของ 9

$\sqrt[3]{8}$ = ……………………………………..

$\sqrt[4]{81}$ = ……………………………………

$\sqrt[5]{-32}$ = …………………………………….

สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right) = a^{\frac{1}{n}}$

2.) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ n เป็นจำนวนคี่} \\ |a| & \end{cases}$

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$ เมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่

4). $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

ตัวอย่าง 1 $2^4 = 16$ และ $(-2)^4 = 16$

2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $2^4 = 16$

-2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $(-2)^4 = 16$

$\therefore$ รากที่ 4 ของ 16 คือ 2 และ -2

ตัวอย่าง 2 $2^3 = 8$

2 เป็นรากที่ 3 ของ 8 เพราะ $2^3 = 8$

แต่ -2 ไม่ใช่เป็นรากที่ 3 ของ 8 เพราะ $(-2)^3 = -8$

$\therefore$ รากที่ 3 ของ 8 คือ 2

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 จะเรียก $\sqrt[n]{a}$ ว่า รากที่ n ของ a หรือ กรณฑ์อันดับที่ n ของ a

โดยที่ 1. ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว a ต้อง ≥ 0

2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว a เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ 1. เครื่องหมาย “$\sqrt{\ }$” เรียกว่า เครื่องหมาย กรณฑ์ เขียน “n” ว่าเป็นอันดับที่

2. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จำนวนจริงที่เขียนในรูป $\sqrt[n]{a}$ เรียก กรณฑ์ เช่น $\sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[3]{-64}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าของรากที่ n ของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $\sqrt{25}$ = ……………………….
2) $\sqrt{64}$ = ……………………….
3) $\sqrt[5]{-243}$ = ……………………….
4) $\sqrt[3]{-125}$ = ……………………….
5) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ = ……………………….
6) $\sqrt[4]{16}$ = ……………………….
7) $\sqrt[3]{125}$ = ……………………….
8) $\sqrt{-64}$ = ……………………….
9) $\sqrt[3]{-8}$ = ……………………….
10) $\sqrt[4]{-16}$ = ……………………….

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยใช้สมบัติของ รากที่ n

1) $\sqrt{5^2}$ = …………………….…………
2) $\sqrt[3]{2^3}$ = ……………………..………..
3) $\sqrt[3]{(-2)^3}$ = …………………………….
4) $\sqrt[5]{(-2)^5}$ =……………….………..
5) $\sqrt{(-3)^2}$ = ……………….…………….
6) $\sqrt[4]{(-2)^4}$ =………………………..
7) $\sqrt{200}$ = ……………………………
8) $\sqrt{75}$ = ………………….……….
9) $\sqrt[3]{240}$ = ……………………………
10) $\sqrt{45}$ = …………………..……….
11) $\sqrt{5}\sqrt{15}$ = …………….…………….
12) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{32}$ = …………………….
13) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ = …………………….
14) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ = …………………………..

เรื่องที่ 3 การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

3.1 การบวก และการลบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

สมบัติของการบวกจำนวนจริง ข้อหนึ่งที่สำคัญและมีการใช้มาก คือ สมบัติการแจกแจงในการบวก พจน์คล้าย ดังตัวอย่าง

1) $3x + 5x = (3+5)x = 8x$ สมบัติของการแจกแจง

2) $8a - 3a = (8-3)a = 5a$

ด้วยวิธีการเช่นนี้เราสามารถนำมาใช้ในเรื่องการบวก การลบ ของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่เรียกว่า “พจน์คล้าย” ซึ่งเป็นกรณฑ์อันดับเดียวกัน จำนวนที่อยู่ภายในเครื่องหมายกรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน

เราทราบว่า $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$ และ $5\sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2}$

ดังนั้น $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 \times \sqrt{2}) + (5 \times \sqrt{2})$

$= (3+5)\sqrt{2}$ (สมบัติการแจกแจง)

$= 8\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

วิธีทำ $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$ $= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= (2+3-1)\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

วิธีทำ $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$ $= \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{25}\sqrt{5}$

$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (2+3-5)\sqrt{5}$

$= 0\sqrt{5}$

$= 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8}$

วิธีทำ $3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8}$ $= (3)(2)\sqrt{5} + (2)(3)\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$

3.2 การคูณ และการหารจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

<u>การคูณ</u>

จากสมบัติข้อที่ 3 ของรากที่ n ที่กล่าวว่า

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ เป็นจำนวนจริง

$$\therefore \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} = 2$$
$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

ตัวอย่างที่ 1 $(2\sqrt{3})(3\sqrt{5}) = 2 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{5}$

$= (2 \cdot 3) \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})$

$= 6\sqrt{15}$

ตัวอย่างที่ 2 $(3\sqrt{8})(5\sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{8} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}$

$= (3 \cdot 5)(\sqrt{8} \cdot \sqrt{2})$

$= 15\sqrt{16}$

$= 15.4$

$= 60$

ตัวอย่างที่ 3 $(2\sqrt[3]{6})\,(5\sqrt[3]{4}) = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4}$

$= (2 \cdot 5) \cdot (\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4})$

$= 10 \cdot \sqrt[3]{24}$

$= 10 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$

$= 10 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

$= 20\sqrt[3]{3}$

ตัวอย่างที่ 4 $= \sqrt[3]{2}\left[5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{16}\right]$

$= (\sqrt[3]{2})(5\sqrt[3]{4}) - (\sqrt[3]{2})(3\sqrt[3]{16})$

$= 5\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{32}$

$= 5 \cdot 2 - 3\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

$= 10 - 3 \cdot 2\sqrt[3]{4}$

$= 10 - 6\sqrt[3]{4}$

<u>การหาร</u>

ใช้สมบัติข้อ 4 ของรากที่ n ที่กล่าวว่า

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ เมื่อ $b \neq 0$

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

หรือใช้สมบัติข้อ 3 ของรากที่ n ที่กล่าวว่า

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

หรือใช้สมบัติที่ว่าด้วยการคูณตัวเศษและตัวส่วนด้วยจำนวนเดียวกัน

เช่น $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{\sqrt{20 \cdot 5}}{5} = \dfrac{\sqrt{100}}{5} = \dfrac{10}{5}$

$= 2$

แบบฝึกหัดที่ 3

จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{8x^2}$

2) $\sqrt[4]{256}$

3) $\sqrt[3]{8y^6}$

4) $\sqrt[5]{-32}$

5) $3\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{32}$

6) $3\sqrt{5}\left(\sqrt{10}+2\sqrt{5}\right)$

7) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[3]{4a}$

8) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{4}$

3.2 เลขยกกำลังที่มีกำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็น จำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n จะได้ว่า

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ตัวอย่างที่ 1

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$

$8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$ $\qquad$ $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนเต็มที่ $n > 0$ และ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำจะได้ว่า

ตัวอย่างที่ 2 $\quad 8^{\frac{3}{2}} = \left[8^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \left[\sqrt{8}\right]^3$

$$27^{\frac{4}{3}} = \left[27^{\frac{1}{3}}\right]^4 = [\sqrt[3]{27}]^4$$

$$125^{\frac{2}{3}} = \left[125^{\frac{1}{3}}\right]^2 = [\sqrt[3]{125}]^2$$

$$4^{\frac{3}{2}} = [4^3]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^3}$$

$$25^{\frac{4}{3}} = [25^4]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{25^4}$$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{8x^2}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{-27}}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3) $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

4) $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

5) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}} \cdot \dfrac{18^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

บทที่ 3

เซต

สาระสำคัญ

1. เซต โดยทั่วไปหมายถึง กลุ่ม คน สัตว์ สิ่งของ ที่รวมกันเป็นกลุ่ม โดยมีสมบัติบางอย่างร่วมกัน และบรรดาสิ่งทั้งหลายที่อยู่ในเซตเราเรียกว่า " สมาชิก" ในการศึกษาเรื่องเซตจะประกอบไปด้วย เซต เอกภพสัมพัทธ์ สับเซตและเพาเวอร์เซต
2. การดำเนินการบนเซต คือ การนำเซตต่าง ๆ มากระทำร่วมกันเพื่อให้เกิดเป็นเซตใหม่ ซึ่งทำได้ 4 วิธีคือ การยูเนี่ยน การอินเตอร์เซคชั่น ผลต่างระหว่างเซต และการคอมพลีเมนต์
3. แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ จะช่วยให้การพิจารณาเกี่ยวกับเซตได้ง่ายขึ้นโดยใช้หลักการคือ
   3.1 ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ "U"
   3.2 ใช้วงกลมหรือวงรีแทนเซตต่าง ๆ ที่เป็นสมาชิกของ "U" และเขียนภายในสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายความหมายเกี่ยวกับเซตได้
2. สามารถหายูเนี่ยน อินเตอร์เซกชั่น ผลต่างของเซต และคอมพลีเมนต์ ได้
3. เขียนแผนภาพแทนเซตและนำไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 เซต

เรื่องที่ 2 การดำเนินการของเซต

เรื่องที่ 3 แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์และการแก้ปัญหา

เรื่องที่ 1 เซต (Sets)

1.1 ความหมายของเซต

เซต หมายถึง กลุ่มสิ่งของต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น คน สัตว์ สิ่งของหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุสมาชิกในกลุ่มได้

ยกตัวอย่าง เซต เช่น

1) เซตของวิทยาลัยเทคนิคในประเทศไทย
2) เซตของพยัญชนะในคำว่า “คุณธรรม”
3) เซตของจำนวนเต็ม
4) เซตของโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาในจังหวัดสกลนคร

เรียกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตว่า “สมาชิก” (Element) ของเซตนั้น เช่น

1) วิทยาลัยเทคนิคดอนเมืองเป็นสมาชิกเซตวิทยาลัยเทคนิคในประเทศไทย
2) “ร” เป็นสมาชิกเซตพยัญชนะในคำว่า “คุณธรรม”
3) 5 เป็นสมาชิกของจำนวนเต็ม
4) โรงเรียนดงมะไฟวิทยาเป็นสมาชิกเซตโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาในจังหวัดสกลนคร

1.2 วิธีการเขียนเซต

การเขียนเซตเขียนได้ 2 แบบ

1. แบบแจกแจงสมาชิกของเซต โดยเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวนั้น

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{ a, e, i, o, u\}$

$C = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

2. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต โดยใช้ตัวแปรแทนสมาชิกของเซต และบอกสมบัติของสมาชิกในรูปของตัวแปร

ตัวอย่างเช่น $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5$\}$

$B = \{ x \mid x$ เป็นสระในภาษาอังกฤษ$\}$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

สัญลักษณ์เซต

โดยทั่ว ๆ ไป การเขียนเซตหรือการเรียกชื่อของเซตจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ได้แก่ A , B , C , . . . , Y , Z เป็นต้น ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงเมื่อเขียนหรือกล่าวถึงเซตนั้น ๆ ต่อไป สำหรับสมาชิกในเซตจะเขียนโดยใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก

มีสัญลักษณ์อีกอย่างหนึ่งที่ใช้อยู่เสมอ ๆในเรื่องเซต คือสัญลักษณ์ $\in$ (Epsilon) แทนความหมายว่า อยู่ใน หรือ ***เป็นสมาชิก***

เช่น กำหนดให้ เซต A มีสมาชิกคือ 2 , 3 , 4 , 8 , 10

ดังนั้น 2 เป็นสมาชิกของ A หรืออยู่ใน A เขียนแทนด้วย $2 \in A$

10 เป็นสมาชิกของ A หรืออยู่ใน A เขียนแทนด้วย $10 \in A$

ใช้สัญลักษณ์ $\notin$ แทนความหมาย “ไม่อยู่ หรือไม่เป็นสมาชิกของเซต เช่น

5 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $5 \notin A$

7 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $7 \notin A$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. การเรียงลำดับของแต่ละสมาชิกไม่ถือเป็นสิ่งสำคัญ

   เช่น $A = \{a, b, c\}$

   $B = \{b, c, a\}$

   ถือว่าเซต A และเซต B เป็นเซตเดียวกัน
2. การนับจำนวนสมาชิกของเซต จำนวนสมาชิกที่เหมือนกันจะนับเพียงครั้งเดียว ถึงแม้จะเขียนซ้ำ ๆ กัน หลาย ๆ ครั้ง

   เช่น $A = \{0, 1, 2, 1, 3\}$ มีจำนวนสมาชิก 4 ตัว คือ 0 , 1 , 2 , 3 เป็นต้น

1.3 ชนิดของเซต

1.3.1 เซตว่าง (Empty Set or Null Set)

<u>บทนิยาม</u>

เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ ϕ หรือ $\{\ \}$ แทนเซตว่าง

(ϕ เป็นอักษรกรีก อ่านว่า phi)

ตัวอย่าง เช่น $A = \{x \mid x$ เป็นชื่อทะเลทรายในประเทศไทย $\}$

ดังนั้น A เป็นเซตว่าง เนื่องจากประเทศไทยไม่มีทะเลทราย

$B = \{x \mid x \in I^{+}$ และ $x + 2 = x\}$

ดังนั้น B เป็นเซตว่าง เนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มบวกที่นำมาบวกกับ 2 แล้วได้ตัวมันเอง เซต B จึงไม่มีสมาชิก

<u>ข้อสังเกต</u> 1. เซตว่างมีจำนวนสมาชิก เท่ากับศูนย์ (ไม่มีสมาชิกเลย)

2. $0 \neq \varnothing$

3. $\{0\}$ ไม่เป็นเซตว่าง เพราะมีจำนวนสมาชิก 1 ตัว

1.3.2 เซตจำกัด (Finite Set)

<u>บทนิยาม</u>
เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกในเซตได้

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, \{3\}\}$ มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว หรือ $n(A) = 3$

$B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มและ $1 \leq x \leq 100\}$ มีจำนวนสมาชิก 100 ตัว

หรือ

$n(B) = 100$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1$\}$ ดังนั้น C เป็นเซตว่าง

มีจำนวนสมาชิก 0 ตัว หรือ $n(C) = 0$

$D = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ มีจำนวนสมาชิก 99 ตัว หรือ $n(D) = 99$

$E = \{x \mid x$ เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์$\}$ มีจำนวนสมาชิก 7 ตัว หรือ $n(E) = 7$

หมายเหตุ จำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $n(A)$

1.3.3 เซตอนันต์ (Infinite Set)

<u>บทนิยาม</u>
เซตอนันต์ คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด (หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด นั่นคือ ไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้แน่นอน)

ตัวอย่างเช่น $A = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$B = \{x \mid x = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ$\}$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนจริง$\}$

$T = \{x \mid x$ เป็นจำนวนนับ$\}$

ตัวอย่าง จงพิจารณาเซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง เซตจำกัดหรือเซตอนันต์

เซต	เซตว่าง	เซตจำกัด	เซตอนันต์
1. เซตของผู้ที่เรียนการศึกษานอกโรงเรียน ปีการศึกษา 2552		/	
2. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่			/
3. เซตของสระในภาษาไทย		/	
4. เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 10 ลงตัว			/
5. เซตของทะเลทรายในประเทศไทย	/	/	

1.3.4 เซตที่เท่ากัน (Equal Set)

เซตสองเซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองเซตมีสมาชิกอย่างเดียวกัน และจำนวนเท่ากัน

บทนิยาม เซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย **A = B** หมายความว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกทุกตัวของเซต B และสมาชิกของเซต B เป็นสมาชิกทุกตัวของเซต A

ถ้าสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B หรือสมาชิกบางตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

ตัวอย่างเช่น $A = \{0, \{1,2\}\}$

$B = \{\{2,1\}, 0\}$

ดังนั้น $A = B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกเลขคู่ที่น้อยกว่า $10\}$

วิธีทำ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

พิจารณา B เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ที่น้อยกว่า 10

จะได้ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ดังนั้น $A = B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{5, 2, 3, 5\}$ และ $C = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$X = 3, 5$

$\mathbf{C = \{3, 5\}}$

ดังนั้น $A = B$

แต่ $A \neq C$ เพราะ $2 \in A$ แต่ $2 \notin C$

$B \neq C$ เพราะ $2 \in B$ แต่ $2 \notin C$

1.3.5 เซตที่เทียบเท่ากัน (Equivalentl Sets)

เซตที่เทียบเท่ากัน คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากันและสมาชิกของเซตจับคู่กันได้พอดีแบบหนึ่งต่อแบบหนึ่ง สัญลักษณ์ เซต A เทียบเท่ากับเซต B แทนด้วย $A \leftrightarrow B$

บทนิยาม เซต A เทียบเท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ หรือ $A \leftrightarrow B$ หมายความว่า สมาชิกของ A และสมาชิกของ B สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งได้พอดี

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

จะเห็นว่า จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับจำนวนสมาชิกของ B

ดังนั้น $A \leftrightarrow B$

$C = \{xy, ab\}$

$D = \{0, 1\}$

ดังนั้น $C \sim D$ เพราะจำนวนสมาชิกเท่ากัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้ว่าเซตคู่ใดเท่ากัน หรือเซตคู่ใดเทียบเท่ากัน

1) $A = \{ x / x$ เป็นจำนวนเต็ม $x^2 - 10x + 9 = 0 \}$

$B = \{1, 9\}$

2) $C = \{a, \{b, c\}, d\}$

$D = \{1, 2, \{3\}\}$

3) $E = \{1, 4, 7\}$

$F = \{4, 1, 7\}$

วิธีทำ

1) $A = B$ และ $A \sim B$ เพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

2) $C \sim D$ แต่ $C \neq D$ เพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน แต่สมาชิกแต่ละคู่ไม่เหมือนกันทุกตัว

3) $E = F$ และ $E \sim F$ เพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$

2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว A ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ B

<u>บทนิยาม</u>

เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงกันว่าจะไม่กล่าวถึง สิ่งอื่นใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนด ใช้สัญลักษณ์ U แทน เอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ

และ $A = \{x \mid x^2 = 4\}$ จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

ตอบ $A = \{2\}$

กำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ

และ A เป็นจำนวนคู่

ตอบ $A = \{2,4,6,8,10\}$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าไม่มีการกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์นั้นเป็นเซตของจำนวนจริง

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
   1) เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่มีชื่อขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ “ส”
   2) เซตของสระในภาษาอังกฤษ
   3) เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก
   4) เซตของจำนวนคู่บวกที่มีค่าน้อยกว่า 20
   5) เซตของจำนวนเต็มลบที่มีค่าน้อยกว่า – 120
   6) $\{ x|x$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 5 และน้อยกว่า $15 \}$
   7) $\{ x|x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ $0 \}$
2. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้
   1) $A = \{3456\}$
   2) $B = \{a,b,c,de,fg,hij,\}$
   3) $C = \{ x|x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 10 ถึง $35 \}$
   4) $D = \{ x|x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $9 \}$
3. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไข
   1) $K = \{ 2,4,6,8\}$
   2) $P = \{ 1,2,3,...\}$
   3) $H = \{ 1,4,9,16,25,...\}$
4. จงพิจารณาเซตต่อไปนี้ เป็นเซตว่างหรือเซตจำกัดหรือเซตอนันต์
   1) เซตของสระในภาษาไทย
   2) เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 21 และ 300
   3) $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มและ $x < 0 \}$
   4) $B = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคู่ที่น้อยกว่า $2 \}$
   5) $C = \{ x \mid x = 9$ และ $x - 3 = 5 \}$
   6) $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $1 \}$
   7) $E = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะ $1 < x < 3 \}$
   8) $F = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม $4 < x < 5 \}$
   9) $B = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนนับ $x^2 + 3x + 2 = 0 \}$
   10) $D = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 5 ลงตัว $\}$

5. เซตต่อไปนี้เซตใดบ้างที่เป็นเซตที่เท่ากัน

1) A = { 2,4,6,8,10 }

B = {x| x เป็นจำนวนคู่บวก 2 ถึง 10 }

2) D = { 7,14,21,28,......343}

E = {x|x = 7r และ r เป็นจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่า 50 }

3) F = { x|x =3n และ n $\in N$ และ n > 10}

G = { 3,6,9}

4) Q = {4}

H = { x|x เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 = 16$ }

เรื่องที่ 2 การดำเนินการของเซต

การดำเนินการที่สำคัญของเซตที่จำเป็นต้องรู้และทำความเข้าใจให้ถ่องแท้มี 4 ชนิด ได้แก่

1. การยูเนียนของเซต
2. การอินเตอร์เซคชั่นของเซต
3. คอมพลีเม้นท์ของเซต
4. ผลต่างของเซต

2.1 การยูเนียนของเซต ใช้สัญลักษณ์ “$\cup$”

บทนิยาม $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ เรียกว่า ผลบวก หรือผลรวม (union) ของ A และ B

ตัวอย่าง 1. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7\}$

จะได้ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$

ตัวอย่าง 2. ถ้า $M = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $L = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ $M \cup L = M$

ตัวอย่าง 3. ถ้า $W = \{a, s, d, f\}$ และ $Z = \{p, k, b\}$

จะได้ $W \cup Z = \{a, s, d, f, p, k, b\}$

ตัวอย่าง 4 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$

จะได้ $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

2.2 การอินเตอร์เซคชัน ใช้สัญลักษณ์ “$\cap$”

บทนิยาม $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ เรียกว่า ผลตัด หรือผลที่เหมือนกัน (Intersection) ของ A และ B

ตัวอย่าง 1. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7\}$

จะได้ $A \cap B = \{1, 3\}$

ตัวอย่าง 2. ถ้า $M = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ และ $L = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ $M \cap L = L$

ตัวอย่าง 3. ถ้า $W = \{a, s, d, f\}$ และ $Z = \{p, k, b\}$

จะได้ $W \cap Z = \{\ \}$

2.3 คอมพลีเม้นต์ของเซต ใช้สัญลักษณ์ “ $'$ ”

บทนิยาม ถ้า U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน $\cup$ แต่ไม่อยู่ใน A เขียน A' แทนคอมพลีเม้นท์ของ A

ดังนั้น $A' = \{ x \mid x \notin A \}$

ตัวอย่าง 1. ถ้า $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A = \{0, 2\}$

จะได้ $A' = \{1, 3, 4, 5\}$

ตัวอย่าง 2. ถ้า $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และ $C = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนคู่$\}$

จะได้ $C' = \{ x \mid x \in U$ และ x เป็นจำนวนคี่ $\}$

2.4 ผลต่างของเซต ใช้สัญลักษณ์ “ — ”

บทนิยาม ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต B ผลต่างระหว่างเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$ ซึ่ง $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

ตัวอย่าง 1. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

จะได้ $A - B = \{0, 1, 2\}$ และ $B - A = \{5, 6, 7\}$

ตัวอย่าง 2. ถ้า U = {1, 2, 3, ... } และ C = { x|x เป็นจำนวนคู่บวก}

จะได้ U – C = {x|x เป็นจำนวนคี่บวก}

สมบัติของเซตที่ควรทราบ

ให้ A,B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1) กฎการสลับที่

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2) กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3) กฎการแจงแจง

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) กฎเอกลักษณ์

$$\phi \cup A = A \cup \phi = A$$

$$U \cap A = A \cap U = A$$

5) $A \cup A' = U$

6) $\phi' = U$ และ $U' = \phi$

7) $(A')' = A$

8) $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$

9) $A - B = A \cap B'$

10) $A \cap \phi = \phi$ และ $A \cup \phi = A$

แบบฝึกหัดที่ 2

1) ถ้า A = { 0,1,2,3,4,5}, และ B { 1,2,3,4 } จงหา

1) $A \cup B$ ……………………………. 2). $B \cup A$ …………………………..……

3). $A \cap B$ .... 4). $B \cap A$ ……………………………..…

5). A – B…………………..…………. 6). B – A………………………………..….

2). กำหนดให้ U = { 1,2,3, ... ,10 }

A = { 2,4,6,8,10 }

B = { 1,3,5,7,9}

C = { 3,4,5,6,7 }

จงหา

1. $A \cap B$ ………………………………………………………………………………………

2. $B \cup C$ ………………………………………………………………………………………

3. $B \cap C$ ……………………………………………………………………………….…

4. $A \cap C$ ..…………………………………………………………………………...……

5. C' ..…………………………………………………………………………..………….

6. $C' \cap A$ ……………………………………………………………………………..……..

7. $C' \cap B$ ..……………………………………………………………………………..……

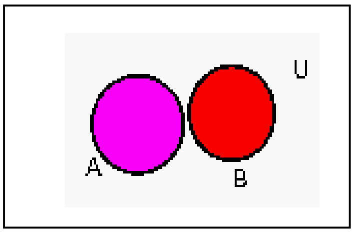
8. $(A \cap B) \cup B$…………………………………………………………………………

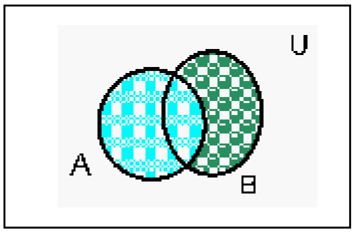
เรื่องที่ 3 แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์และการแก้ปัญหา

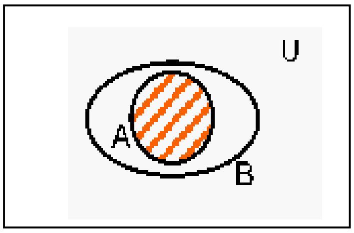
3.1 แผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์

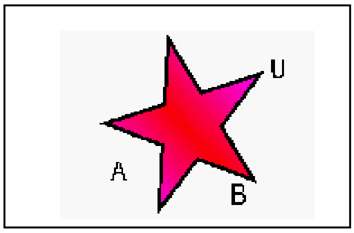
การเขียนแผนภาพแทนเซตช่วยให้เข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเซตชัดเจนยิ่งขึ้น เรียกแผนภาพแทนเซตว่า **แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์** เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ จอห์น เวนน์ (John Venn พ.ศ.2377-2466) และนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส เลโอนาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler พ.ศ. 2250-2326) ซึ่งเป็นผู้คิดแผนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต

การเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler) เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตนิยมเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้รูปวงกลม วงรี หรือรูปปิดใด ๆ แทนเซตต่าง ๆ ซึ่งเป็นสับเซตของ U ลักษณะต่าง ๆ ของการเขียนแผนภาพ มีดังนี้





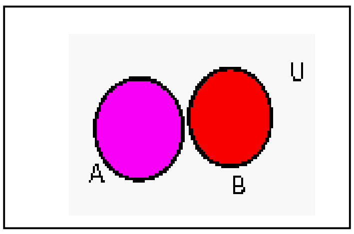


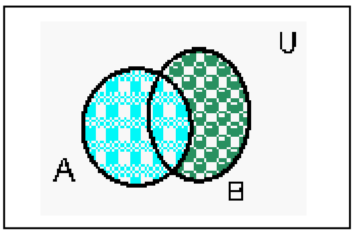


ซึ่งแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เมื่อนำมาใช้กับการดำเนินการบนเซตแล้วนั้นจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจในเรื่องการดำเนินการบนเซตมากขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ยูเนียน (Union) สามารถใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ แสดงให้เห็นกรณีต่าง ๆ ของเซตใหม่ที่เกิดจาก $A \cup B$ ได้จากส่วนที่แรเงา ดังนี้

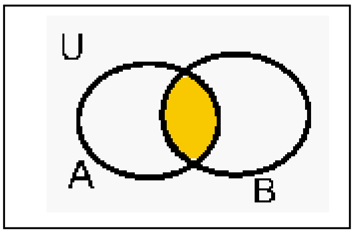
(ระบายพื้นที่ของทั้งสองเซตไม่ว่าจะมีพื้นที่ซ้ำกันหรือไม่ซ้ำกัน)

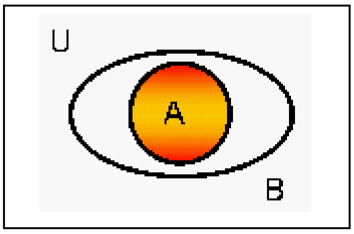


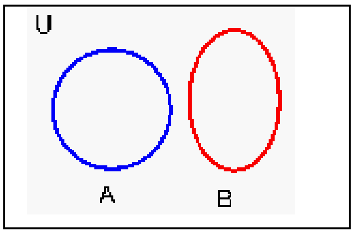


อินเตอร์เซกชัน (intersection)

สามารถใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ แสดงให้เห็นกรณีต่าง ๆ ของเซตใหม่ที่เกิดจาก $A \cap B$ ได้จากส่วนที่แรเงา ดังนี้

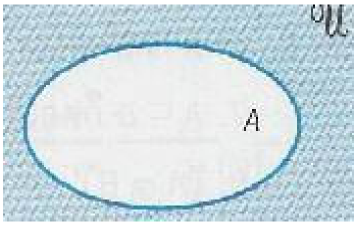






คอมพลีเมนต์ (Complement)

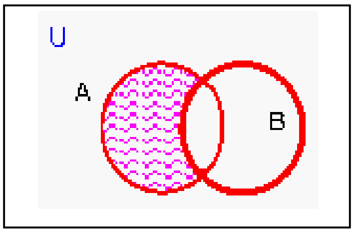
กำหนดให้ เซต A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ (U) แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A' (อ่านว่า เอไพรม์) และเพื่อให้มองภาพได้ชัดขึ้นอาจใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์แสดงการคอมพลีเมนต์ของเซต A ได้ ดังนี้

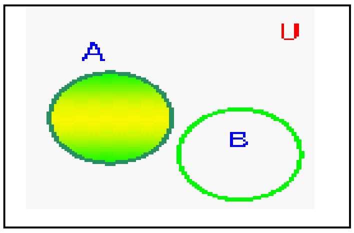


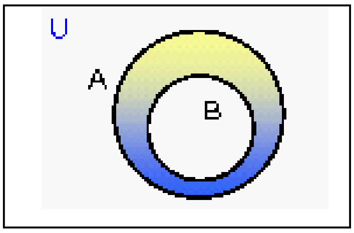
A' คือ ส่วนที่แรเงา

ผลต่าง (Relative Complement or Difference)

สามารถใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ แสดงให้เห็นกรณีต่าง ๆ ของเซตใหม่ที่เกิดจาก A - B ได้จากส่วนที่แรเงา ดังนี้ (ระบายสีเฉพาะพื้นที่ของเซต A ที่ไม่ใช่พื้นที่ของเซต B)







3.1 การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

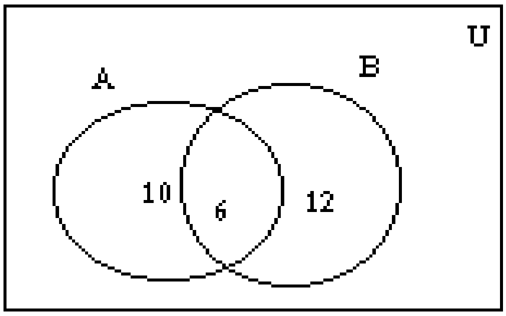
- ถ้าเซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกันจะได้

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

- ถ้าเซต A และ B มีสมาชิกบางตัวร่วมกันจะได้

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

พิจารณาจากรูป ตัวเลขในภาพแสดงจำนวนสมาชิกเซต



จะได้ 1) $n(A) = 16$ 2) $n(B) = 18$

2) $n(A \cap B) = 6$ 4) $n(A \cup B) = 28$

5) $n(A') = 12$ 6) $n(B') = 10$

7) $n(A \cap B)' = 22$ 8) $n(A' \cup B') = 22$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ A มีสมาชิก 15 ตัว B มีสมาชิก 12 ตัว $A \cap B$ มีสมาชิก 7 ตัว จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$

วิธีทำ

$n(A) = 15$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 7$

จากสูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ เท่ากับ 20 ตัว

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ U = {1, 2, 3, . . . , 10}

ถ้า $n(A' \cup B') = 5$, $n(A') = 3$, $n(B) = 6$ แล้ว จงหา $n(A \cup B)'$

วิธีทำ

จาก $n(U) = 10$, $n(A' \cup B') = 5$, $n(A') = 3$, $n(B) = 6$

$n(A \cup B)' = n(A' \cup B')$ $\therefore n(A \cap B) = 10 - 5 = 5$

$n(A) = 10 - 3 = 7$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

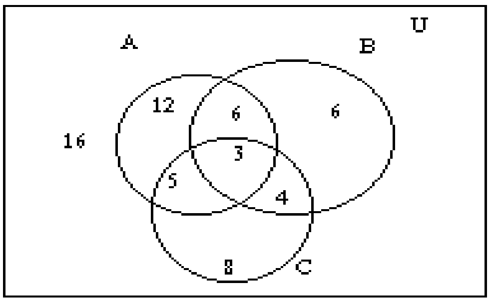
$n(A \cup B) = 7 + 6 - 5 = 8$

$\therefore$ $n(A \cup B)' = 10 - 8 = 2$

- ถ้าเซต A เซต B และเซต C มีสมาชิกบางตัวร่วมกัน

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาจากรูป ตัวเลขในภาพแสดงจำนวนสมาชิกของเซต



จะได้

1) $n(U) = 60$

2) $n(A) = 26$

3) $n(B \cap C) = 7$

4) $n(A \cap C) = 8$

5) $n(A \cap B \cap C) = 3$

3.2 การนำเซตไปใช้ในการแก้ปัญหา

การแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ความรู้เรื่องเซต สิ่งที่นำมาใช้ประโยชน์มากก็คือ การเขียนแผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์ และนำความรู้เรื่องสมาชิกของเซตจำกัด ดังที่จะศึกษารายละเอียดต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 80 คน พบว่า พนักงาน 18 คนมีรถยนต์ พนักงาน 23 คน มีบ้านเป็นของตัวเอง และพนักงาน 9 คน มีบ้านของตัวเองและรถยนต์

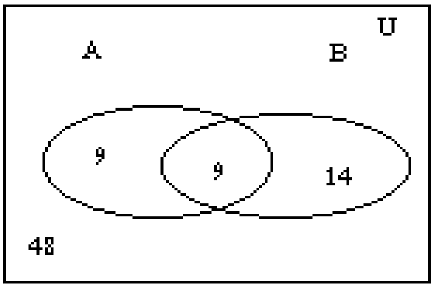
จงหา

1) จำนวนพนักงานทั้งหมดที่มีรถยนต์หรือมีบ้านเป็นของตัวเอง
2) จำนวนพนักงานที่ไม่มีรถยนต์หรือบ้านของตัวเอง

วิธีทำ ให้ A แทนเซตของพนักงานที่มีรถยนต์

B แทนเซตของพนักงานที่มีบ้านเป็นของตัวเอง

เขียนจำนวนพนักงานที่สอดคล้องกับข้อมูลลงในแผนภาพได้ดังนี้



1) $n(A) = 18$, $n(B) = 23$, $n(A \cap B) = 9$

พิจารณา $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 23 - 9 = 32$

ดังนั้น จำวนพนักงานที่มีรถยนต์หรือมีบ้านของตัวเองเป็น 32 คน

2) เนื่องจากพนักงานทั้งหมด 80 คน

นั่นคือ พนักงานที่ไม่มีรถยนต์หรือบ้านของตัวเอง = 80 - 32 = 48 คน

ดังนั้น พนักงานที่ไม่มีรถยนต์หรือบ้านของตัวเองเป็น 48 คน

ตัวอย่างที่ 2 ในการสำรวจเกี่ยวกับความชอบของนักศึกษา 100 คน พบว่านักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์ 52 คน นักศึกษาที่ชอบเรียนภาษาไทย 60 คน นักศึกษาที่ไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และไม่ชอบเรียนภาษาไทยมี 14 คน จงหานักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย

วิธีทำ **แนวคิดที่ 1** ให้ A แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์

B แทนเซตของนักศึกษาที่ชอบเรียนภาษาไทย

จาก $n(A) = 52$, $n(B) = 60$

$n(A' \cap B') = 14 = n(A \cup B)'$ $[\therefore A' \cap B' = (A \cup B)']$

$\therefore \quad n(A \cup B) = 100$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

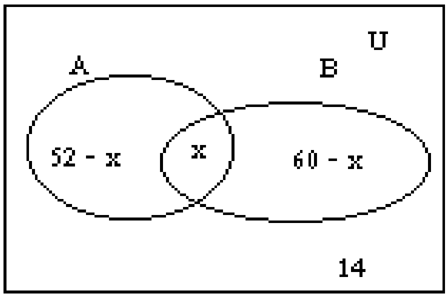
$100 - 14 = 52 + 60 - n(A \cap B)$

$86 = 52 + 60 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 112 - 86 = 26$

ดังนั้น จำนวนนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย มี 26 คน

แนวคิดที่ 2



ให้ x แทนจำนวนนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย

จากแผนภาพเขียนสมการได้ดังนี้

$(52 - x) + x + (60 - x) = 100 - 14$

$112 - x = 86$

$x = 112 - 86 = 26$

ดังนั้น จำนวนนักศึกษาที่ชอบเรียนคณิตศาสตร์และภาษาไทย มี 26 คน

ตัวอย่างที่ 3 นักศึกษาสาขาหนึ่งมี 1,000 คน มีนักศึกษาเรียนภาษาอังกฤษ 800 คน เรียนคอมพิวเตอร์ 400 คน และเลือกเรียนทั้งสองวิชา 280 คน อยากทราบว่า

1) มีนักศึกษากี่คนที่เรียนภาษาอังกฤษเพียงวิชาเดียว
2) มีนักศึกษากี่คนที่เรียนคอมพิวเตอร์เพียงวิชาเดียว
3) มีนักศึกษากี่คนที่ไม่ได้เรียนวิชาใดวิชาหนึ่งเลย
4) มีนักศึกษากี่คนที่ไม่ได้เรียนทั้งสองวิชาพร้อมกัน

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของนักศึกษาทั้งหมด

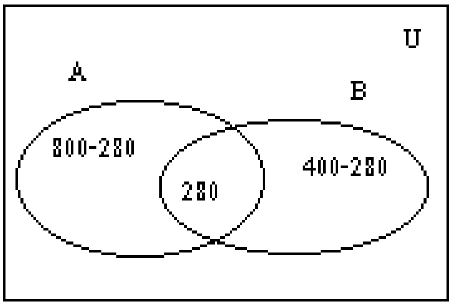
A แทน เซตของนักศึกษาที่เรียนวิชาภาษาอังกฤษ

B แทน เซตของนักศึกษาที่เรียนวิชาคอมพิวเตอร์

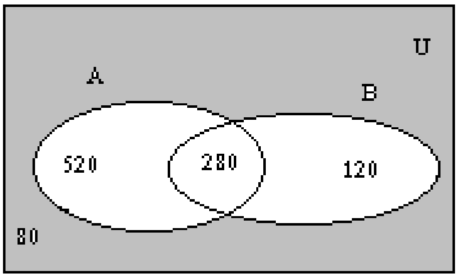
$A \cap B$ แทน เซตของนักศึกษาที่เรียนทั้งสองวิชา

$n(U) = 1{,}000$, $n(A) = 800$, $n(B) = 400$, $n(A \cap B) = 280$

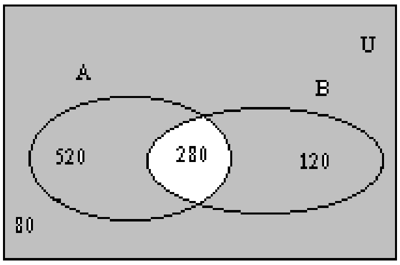
เขียนแผนภาพได้ดังนี้



1) นักศึกษาที่เรียนภาษาอังกฤษเพียงวิชาเดียวมีจำนวน 800 - 280 = 520 คน
2) นักศึกษาที่เรียนคอมพิวเตอร์เพียงวิชาเดียวมีจำนวน 400 - 280 = 120 คน
3) นักศึกษาที่ไม่ได้เรียนวิชาใดวิชาหนึ่งเลย คือส่วนที่แรเงาในแผนภาพซึ่งมีจำนวนเท่ากับ 1,000 - 520 - 280 - 120 = 80 คน



4) นักศึกษาที่ไม่เรียนทั้งสองวิชาพร้อมกัน คือ นักศึกษาที่เรียนวิชาใดวิชาหนึ่งเพียงวิชาเดียว รวมกับนักศึกษาที่ไม่เรียนวิชาใดเลย คือ ส่วนที่แรเงาในแผนภาพ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ 1,000 - 280 = 720 หรือ 520 + 120 + 80 = 720 คน



ตัวอย่างที่ 4 ในการสำรวจผู้ใช้สบู่ 3 ชนิด คือ ก , ข , ค พบว่ามีผู้ใช้ชนิด ก. 113 คน, ชนิด ข. 180 คน, ชนิด ค. 190 คน, ใช้ชนิด ก . และ ข. 45 คน, ชนิด ก. และ ค. 25 คน, ชนิด ข. และ ค. 20 คน, ทั้ง 3 ชนิด 15 คน, ไม่ใช้ทั้ง 3 ชนิด 72 คน จงหาจำนวนของผู้เข้ารับการสำรวจทั้งหมด

วิธีทำ

แนวคิดที่ 1

ให้ A แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ก.
B แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ข.
C แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ค.

จาก $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

โดยที่

$n(A) = 113$

$n(B) = 180$

$n(C) = 190$

$n(A \cap B) = 45$

$n(A \cap C) = 25$

$n(B \cap C) = 20$

$n(A \cap B \cap C) = 15$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$\therefore \quad n(A \cup B \cup C) = 113 + 180 + 190 - 45 - 20 - 25 + 15 = 408$

จำนวนผู้ที่ใช้สบู่ ก. หรือ ข. หรือ ค. = 408 คน

จำนวนผู้ที่ไม่ใช้ทั้ง 3 ชนิด = 72 คน

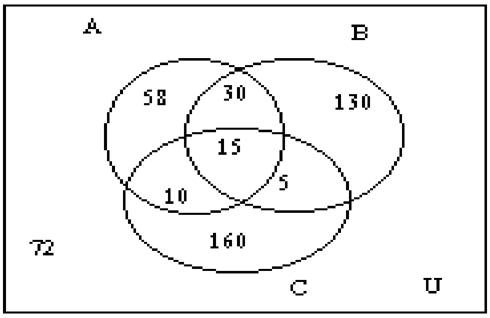
ดังนั้น จำนวนของผู้เข้ารับการสำรวจทั้งหมด 408 + 72 = 480 คน

แนวคิดที่ 2

ให้ A แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ก.

B แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ข.

C แทนผู้ใช้สบู่ชนิด ค.



จำนวนผู้ที่ใช้สบู่ ก. หรือ ข. หรือ ค. = 58 + 30 + 10 + 15 + 160 + 5 + 130

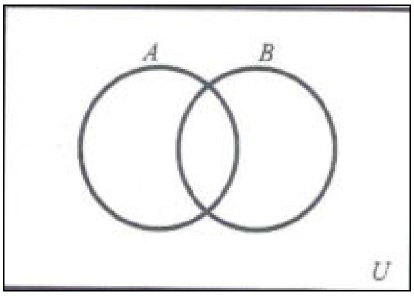
= 408 คน

จำนวนผู้ที่ไม่ใช้ทั้ง 3 ชนิด = 72 คน

ดังนั้น จำนวนของผู้เข้ารับการสำรวจทั้งหมด 408 + 72 = 480 คน

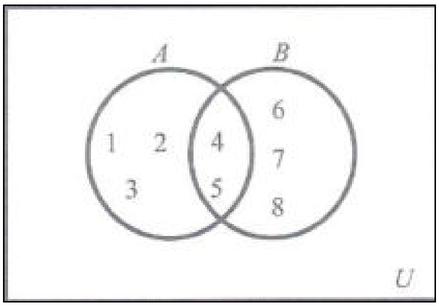
แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้



1) B'
2) $A \cap B'$
3) A'
4) $A' \cup B$
5) $A' \cup B'$

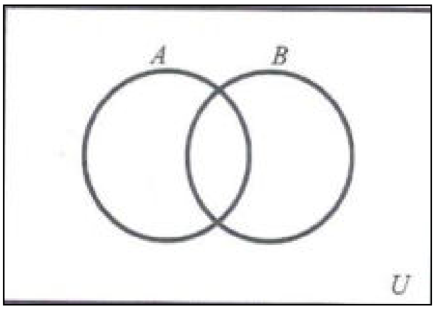
2. จากแผนภาพที่กำหนดให้



จงหาค่า

1) A'
2) $(A \cap B)'$
3) $A' U \ B$
4) $A' \cap B$

3. จากแผนภาพ



กำหนดให้ U , A, B และ $A \cap B$ เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก 100 ,40,25, และ 6 ตามลำดับ จงเติมจำนวนสมาชิกของเซตต่าง ๆ ลงในตารางต่อไปนี้

เซต	**A - B**	**B - A**	**$A \cap B$**	**A'**	**B'**	**$(A \cup B)'$**
จำนวนสมาชิก						

4. จากการสอบถามผู้เรียนชอบเล่นกีฬา 75 คน พบว่า ชอบเล่นปิงปอง 27 คน ชอบเล่นแบตมินตัน 34 คน ชอบเล่นฟุตบอล 42 คน ชอบทั้งฟุตบอลและปิงปอง 14 คน ชอบทั้งฟุตบอลและแบตมินตัน 12 คน ชอบทั้งปิงปองและแบดมินตัน 10 คน ชอบทั้งสามประเภท 7 คน จงหาว่านักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาประเภทเดียวมีกี่คน

บทที่ 4
การให้เหตุผล

สาระสำคัญ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลภายหลังจากค้นพบความจริงที่ได้จากการสังเกต หรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งจากทุก ๆ กรณีย่อยแล้วนำบทสรุปมาเป็นความรู้แบบทั่วไปเราเรียกข้อสรุปแบบนี้ว่า " ข้อความคาดการณ์"
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัยไม่ได้คำนึงถึงความจริงหรือความเท็จแต่จะคำนึงเฉพาะข้อสรุปที่ต้องสรุปออกมาได้เท่านั้น

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การให้เหตุผล

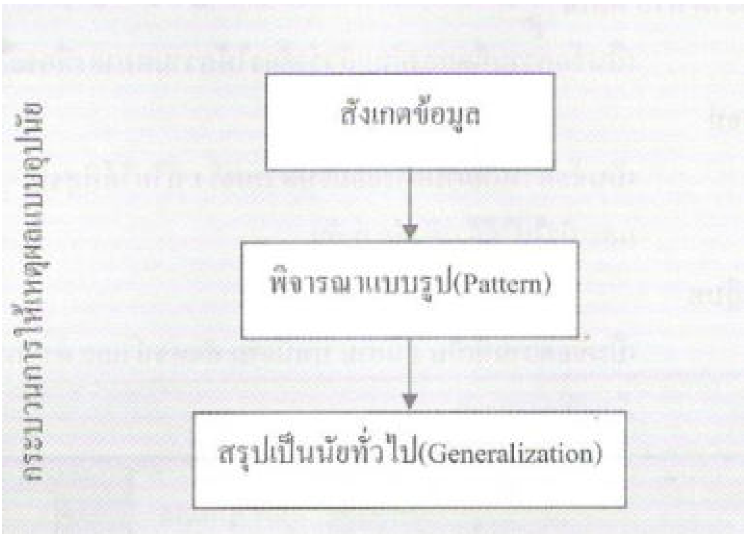
เรื่องที่ 2 การอ้างเหตุผลโดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

เรื่องที่ 1 การให้เหตุผล

การให้เหตุผลมีความสำคัญ เพราะการดำเนินชีวิตของคนเราต้องขึ้นอยู่กับเหตุผลไม่ว่าจะเป็นความเชื่อ การโต้แย้ง และการตัดสินใจ เราจำเป็นต้องใช้เหตุผลประกอบทั้งสิ้น อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการหาความรู้ของศาสตร์ต่าง ๆ อีกด้วย การให้เหตุผล แบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง การสรุปผลภายหลังจากการค้นพบความจริงที่ได้จากการใช้สังเกต หรือการทดลองมาแล้วหลาย ๆ ครั้ง จากทุก ๆ กรณีย่อย ๆ แล้วนำบทสรุปมาเป็นความรู้แบบทั่วไป หรืออีกนัยหนึ่ง การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง การให้เหตุผลโดยยึดความจริงส่วนย่อยที่พบเห็นไปสู่ความจริงส่วนใหญ่



<u>ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย</u>

1. มนุษย์สังเกตพบว่า : ทุก ๆวันดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก และตกทางทิศตะวันตก
   จึงสรุปว่า : ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก และตกทางทิศตะวันตกเสมอ
2. สุนทรี พบว่า ทุกครั้งที่คุณแม่ไปซื้อก๋วยเตี๋ยวผัดไทยจะมีต้นกุยช่ายมาด้วยทุกครั้ง
   จึงสรุปว่า ก๋วยเตี๋ยวผัดไทยต้องมีต้นกุยช่าย
3. ชาวสวนมะม่วงสังเกตมาหลายปีพบว่า ถ้าปีใดมีหมอกมาก ปีนั้นจะได้ผลผลิตน้อย
   เขาจึงสรุปว่าหมอกเป็นสาเหตุที่ทำให้ผลผลิตน้อย ต่อมามีชาวสวนหลายคนทดลอง
   ฉีดน้ำล้างช่อมะม่วง เมื่อมีหมอกมาก ๆ พบว่าจะได้ผลผลิตมากขึ้น
   จึงสรุปว่า การล้างช่อมะม่วงตอนมีหมอกมาก ๆ จะทำให้ได้ผลผลิตมากขึ้น

4. นายสมบัติ พบว่า ทุกครั้งที่ทำความดีจะมีความสบายใจ
จึงสรุปผลว่า การทำความดีจะทำให้เกิดความสบายใจ

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัยทางคณิตศาสตร์

1. จงใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยสรุปผลเกี่ยวกับผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวน

$0+2 = 2$ (จำนวนคู่)

$2+4 = 6$ (จำนวนคู่)

$4+6 = 10$ (จำนวนคู่)

$6+8 = 14$ (จำนวนคู่)

$8+10 = 18$ (จำนวนคู่)

สรุปผลว่า ผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่

2.
$$11\times 11 = 121$$
$$11\times 111 = 12321$$
$$1111\times 1111 = 1234321$$
$$11111\times 11111 = 123454321$$

3.
$$(1 \times 9) + 2 = 11$$
$$(12 \times 9) + 3 = 111$$
$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$
$$(1234 \times 9) + 5 = 11111$$

ข้อสังเกต

1) ข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจจะไม่จริงเสมอไป
2) การสรุปผลของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้สรุป
3) ข้อสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน

ตัวอย่าง 1. กำหนด จำนวน 2, 4, 6 , a จงหา จำนวน a
จะได้ $a = 8$

2. กำหนด จำนวน 2, 4, 6 , a จงหา จำนวน a
จะได้ $a = 10$ เพราะว่า $4 + 6 = 10$

3. กำหนด จำนวน 2, 4, 6 , a จงหา จำนวน a จะได้ $a = 22$
เพราะว่า $6 = (2 \times 4)-2$ และ $22 = (4 \times 6)-2$

4) ข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจ <u>ผิดพลาดได้</u>

ตัวอย่าง ให้ $F(n) = n^2 - 79n + 1601$

ทดลองแทนค่าจำนวนนับ n ใน F(n)

$n = 1$ ได้ $F(1) = 1523$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$n = 2$ ได้ $F(2) = 1447$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$n = 3$ ได้ $F(3) = 1373$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$\therefore\ F(n) = n^2 - 79n + 1601$

แทนค่า n ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งแทน $n = 79$ ได้ F(79) เป็นจำนวนเฉพาะ

จากการทดลองดังกล่าว อาจสรุปได้ว่า $n^2 - 79n + 1601$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับทุกจำนวนนับ

แต่
$$\begin{aligned} F(n) &= n^2 - 79n + 1601 \\ F(80) &= 80^2 - (79)(80) + 1601 \\ &= 1681 \\ &= (41)(41) \end{aligned}$$

$\therefore$ F(80) ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

แบบฝึกหัดที่ 1

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1) 1,4,9,16, $\square$, $\square$,49, 64, $\square$, $\square$

2) 2,7,17, $\square$,52 , $\square$, $\square$

3) 5,10,30,120, $\square$, $\square$

4) ถ้า $12345679 \times 9 = 111111111$

$12345679 \times 18 = 222222222$

$12345679 \times 27 = 333333333$

$12345679 \times \square = \square$

$12345679 \times \square = 999999999$

5) ถ้า

$2 = 2$

$2+4 = 6$

$2+4+6 = 12$

$2+4+6+8 = 20$

$2+4+6+8+\square = 30$

$2+4+\square+8+\square+12 = \square$

$2+\square+\square+8+\square\ 12+14 = \square$

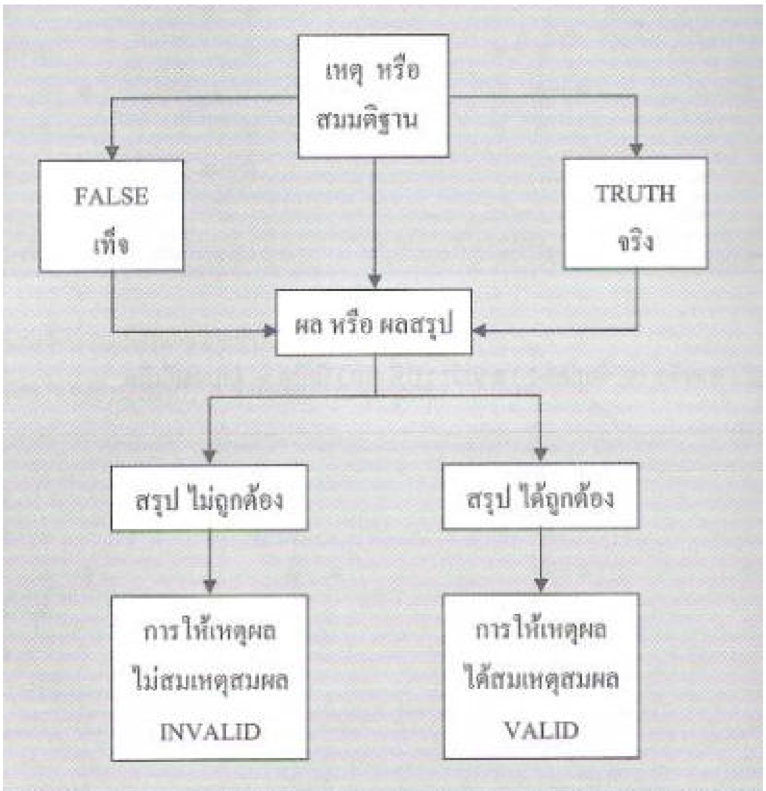
$2+\square+\square+8+\square+12+14+\square = \square$

1.2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning)

เป็น การนำความรู้พื้นฐานที่อาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

การให้เหตุผลแบบนิรนัย ไม่ได้คำนึงถึง ความจริงหรือความเท็จ แต่จะคำนึงถึง เฉพาะข้อสรุปที่ต้องออกมาได้เท่านั้น

พิจารณากระบวนการการให้เหตุผลแบบนิรนัย จากแผนภาพดังนี้



<u>**ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบนิรนัย**</u>

1. เหตุ 1) จำนวนคู่หมายถึงจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว

2) 10 หารด้วย2 ลงตัว

ผล 10 เป็นจำนวนคู่

2. เหตุ 1) คนที่ไม่มีหนี้สินและมีเงินฝากในธนาคารมากกว่า 10 ล้านบาท เป็นเศรษฐี

2) คุณมานะไม่มีหนี้สินและมีเงินฝากในธนาคาร 11 ล้านบาท

ผล คุณมานะเป็นเศรษฐี

3. เหตุ 1) นักกีฬาการแข่งทุกคนจะต้องมีสุขภาพดี

2) เกียรติศักดิ์เป็นนักฟุตบอลทีมชาติไทย

ผล เกียรติศักดิ์มีสุขภาพดี

จากตัวอย่างจะเห็นว่าการยอมรับความรู้พื้นฐานหรือความจริงบางอย่างก่อน แล้วจึงหาข้อสรุปจากสิ่งที่ยอมรับแล้วนั้น ซึ่งเรียกว่า ผล การสรุปผลจะถูกต้องก็ต่อเมื่อเป็นการสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล(valid) เช่น

เหตุ 1) เรือทุกลำลอยน้ำ

2) ถังน้ำพลาสติกลอยน้ำได้

ผล ถังน้ำพลาสติกเป็นเรือ

การสรุปผลจากข้างต้นไม่สมเหตุสมผล แม้ว่าข้ออ้างหรือเหตุทั้งสองข้อจะเป็นจริง แต่การที่เราทราบ ว่า เรือทุกลำลอยน้ำได้ก็ไม่ได้หมายความว่าสิ่งอื่นๆ ที่ลอยน้ำได้จะต้องเป็นเรือเสมอไป ข้อสรุปในตัวอย่างข้างต้นจึงเป็นการสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล

ข้อสังเกต

1. เหตุเป็นจริง และ ผลเป็นจริง

เหตุ แมงมุมทุกตัวมี 6 ขา

และสัตว์ที่มี 6 ขา ทุกตัวมีปีก

ผล ดังนั้นแมงมุมทุกตัวมีปีก

2. เหตุเป็นเท็จ และ ผลเป็นเท็จ

เหตุ ถ้านายดำถูกล๊อตเตอรี่รางวัลที่หนึ่ง

นายดำจะมีเงินมากมาย

แต่นายดำไม่ถูกล๊อตเตอรี่รางวัลที่หนึ่ง

ผล ดังนั้นนายดำมีเงินไม่มาก

3. เหตุอาจเป็นจริงและผลอาจเป็นเท็จ

4. ผลสรุปสมเหตุสมผลไม่ได้ประกันว่าข้อสรุปจะต้องเป็นจริงเสมอไป

แบบฝึกหัดที่ 2

จงตรวจสอบผลที่ได้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

1) เหตุ 1. คนทุกคนที่เป็นไข้หวัดต้องไอ
2. คนชื่อมุนีไอ
ผล มุนีเป็นไข้หวัด

2) เหตุ 1. ชาวนาทุกคนเป็นคนอดทน
2. นายมีเป็นชาวนา
ผล นายมีเป็นคนอดทน

3) เหตุ 1. สัตว์มีปีกจะบินได้
2. นกกระจอกเทศเป็นสัตว์มีปีก
ผล นกกระจอกเทศบินได้

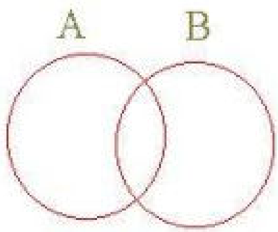
4) เหตุ 1. จำนวนเต็มที่หารด้วย 9 ลงตัว จะหารด้วย 3 ลงตัว
2. 15 หารด้วย 3 ลงตัว
ผล 15 หารด้วย 9 ลงตัว

5) เหตุ 1. สัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมบางชนิดไม่มีขา
2. งูไม่มีขา
ผล งูเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม

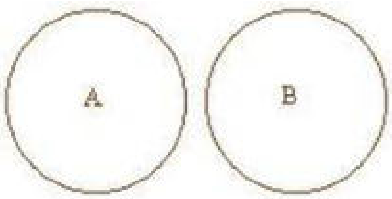
เรื่องที่ 2 การอ้างเหตุผลโดยใช้แผนภาพของเวนน์- ออยเลอร์

ออยเลอร์ เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ มีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ. 1707 - 1783 เขาได้ค้นพบวิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้รูปปิด เช่น วงกลม ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่าย และรวดเร็ว โดยมีหลักการดังนี้

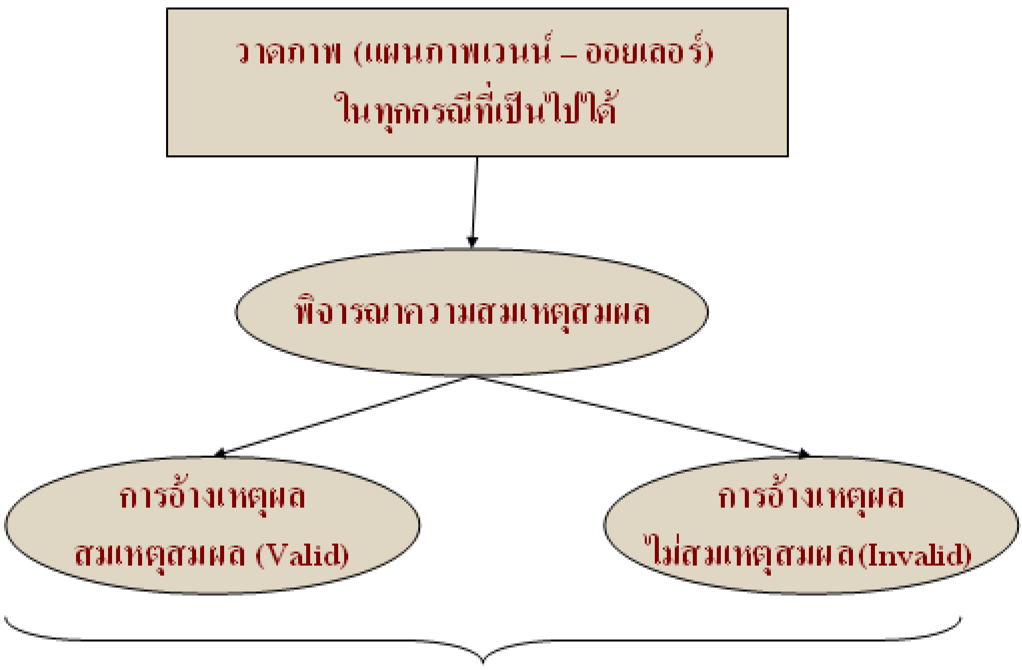
1. เขียนวงกลมแต่ละวงแทนเซตแต่ละเซต
2. ถ้ามี 2 เซตสัมพันธ์กันก็เขียนวงกลมให้คาบเกี่ยวกัน



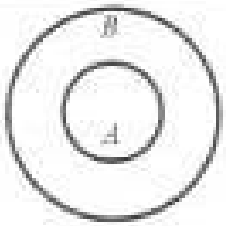
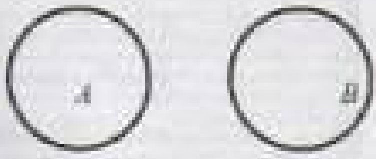
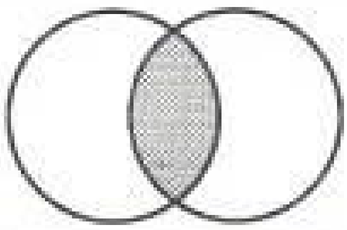
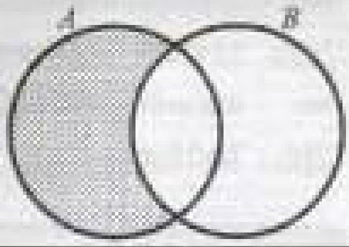
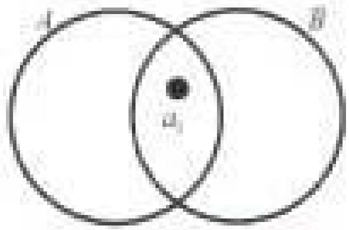
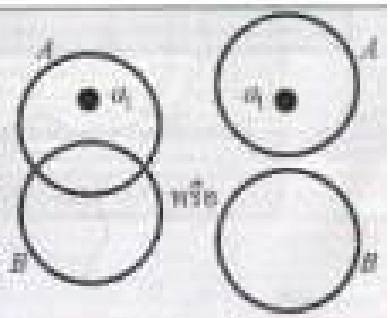
3. ถ้าเซต 2 เซตไม่สัมพันธ์กันก็เขียนวงกลมให้แยกห่างจากกัน



แผนผังแสดงการตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้แผนภาพเวนน์- ออยเลอร์



ข้อความ หรือเหตุและผล และแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ ที่ใช้ในการให้เหตุผลมี 6 แบบ ดังนี้

แบบ ที่	เหตุ และ ผล	แผนภาพ
1.	สมาชิกของ A ทุกตัวเป็นสมาชิกของ B เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่าทุกรูปเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	
2.	ไม่มีสมาชิกของ A ใดๆ เป็นสมาชิกของ B เช่น ไม่มีสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า	
3.	มีสมาชิกของ A บางส่วน เป็นสมาชิกของ B เช่น สามเหลี่ยมมุมฉากบางรูปเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	
4.	มีสมาชิกของ A บางส่วน ไม่เป็นสมาชิกของ B เช่น สามเหลี่ยมมุมฉากบางรูปไม่เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	
5.	มีสมาชิกของ A หนึ่งสมาชิก ที่เป็นสมาชิกของ B เช่น A และ B เป็นจำนวนสามเหลี่ยม(Triangular Numbers) $21 \le A$ และ $B \ge 21$ 21 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม	
6.	มีสมาชิกของ A หนึ่งสมาชิก ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B เช่น B เป็นเซตของคนที่พักอาศัยในกรุงเทพ ก้อยพักอาศัยในอยุธยาและเป็นลูกของเทวา สรุปว่า เทวา อาจจะพักอาศัยในกรุงเทพ หรือ ไม่ใช่ก็ได้	

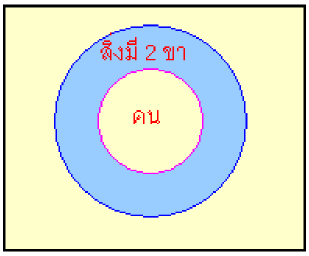
ตัวอย่าง การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดยใช้แผนภาพ

1. เหตุ 1 : คนทุกคนเป็นสิ่งที่มีสองขา

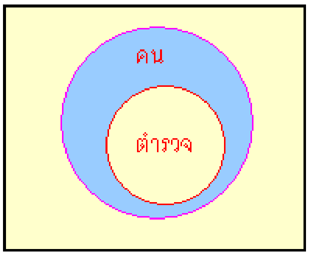
2 : ตำรวจทุกคนเป็นคน

ผลสรุป ตำรวจทุกคนเป็นสิ่งที่มีสองขา

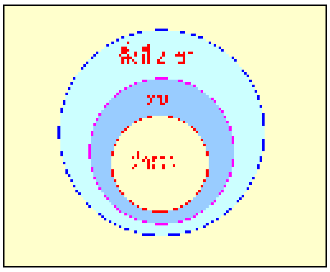
จากเหตุ 1



จากเหตุ 2



แผนภาพรวม

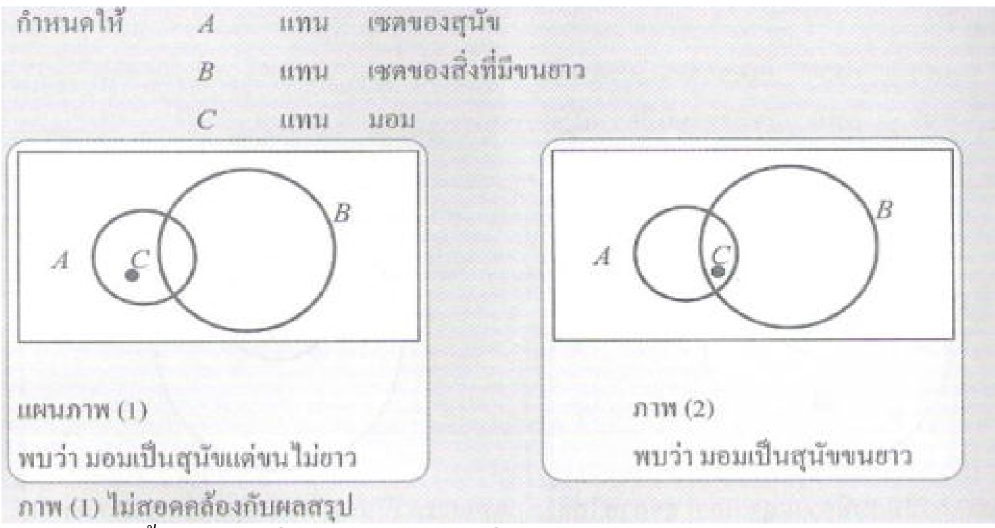


จากแผนภาพจะเห็นว่า วงของ " ตำรวจ " อยู่ในวงของ " สิ่งมี 2 ขา " แสดงว่า " ตำรวจทุกคนเป็นคนมีสองขา " ซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปที่กำหนดให้ ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

2. เหตุ 1 : สุนัขบางตัวมีขนยาว

2 : มอมเป็นสุนัขของฉัน

ผลสรุป มอมเป็นสุนัขที่มีขนยาว



ดังนั้น ผลสรุปที่ว่า มอมเป็นสุนัขที่มีขนยาว ไม่สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัดที่ 3

จงตรวจสอบผลที่ได้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

1) เหตุ 1. ถ้าฝนตก แคทลียาก็ไม่ออกนอกบ้าน

2. ฝนตก

ผล แคทลียาไม่ออกนอกบ้าน

2) เหตุ 1. ถ้าสมชายขยันเรียนแล้วเขาสอบเข้าเกษตรได้

2. สมชายสอบเข้าเกษตรไม่ได้

ผล สมชายไม่ขยันเรียน

3) เหตุ 1. ถ้าอากาศชื้นแล้วอุณหภูมิจะลด

2. ถ้าอุณหภูมิลด แล้วเกิดหมอก

3. อากาศชื้น

ผล จะเกิดหมอก

4) เหตุ 1. a เป็นจำนวนบวก หรือเป็นจำนวนลบ

2. a ไม่เป็นจำนวนบวก

ผล a เป็นจำนวนลบ

5) เหตุ 1. แมวบางตัวมีสองขา

2. นกยูงทุกตัวมีสองขา

ผล นกบางตัวเป็นแมว

บทที่ 5
อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้

สาระสำคัญ

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดคล้ายกัน อัตราส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเท่ากัน

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทุกรูป อัตราส่วนความยาวด้าน 2 ด้าน จะถูกกำหนดค่าต่างๆไว้ดังนี้

2.1 ค่าไซน์ของมุมใด (sine) จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านตรงข้ามมุมนั้น กับความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.2 ค่าโคไซน์ของมุมใด (cosine) จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างความยาวด้านประชิดมุมกับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.3 ค่าแทนเจนต์ของมุมใด (tangent) จะเท่ากับ อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านตรงข้ามมุมกับความยาวของด้านประชิดมุมนั้นๆ

3. นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติหลัก 3 ค่านี้แล้ว ส่วนกลับของ sine , cosine และ tangent เรียกว่า cosecant , secant และ cotangent ตามลำดับ

4. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30,45 และ 60 องศา มีค่าเฉพาะของแต่ละอัตราส่วน สามารถพิสูจน์ได้

5. การแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้อง จะทำโดยการเปลี่ยนปัญหาโจทย์ให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ และใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการช่วยหาคำตอบโดยเฉพาะการนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดระยะทางและความสูง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติได้
2. หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30^0 , 45^0 และ 60^0 ได้
3. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง ความสูง และการวัดได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เรื่องที่ 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30, 45 และ 60 องศา

เรื่องที่ 3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง ความสูง และการวัด

เรื่องที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

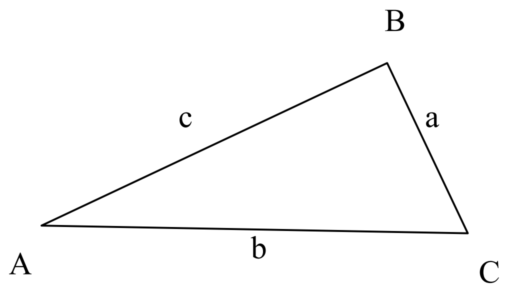
เป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ โดยหาความสัมพันธ์ระหว่างด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม มีความสำคัญต่อวิชาดาราศาสตร์ การเดินเรือ และงานสำรวจใช้ในการคำนวณส่งสูงของภูเขา และหาความกว้างของแม่น้ำ มีประโยชน์มากสำหรับวิชาวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และการศึกษาเกี่ยวกับวัตถุ ซึ่งมีสภาพเป็นคลื่น เช่น แสง เสียง แม่เหล็กไฟฟ้าและวิทยุ

ความรู้เดิมที่ต้องนำมาใช้ในบทเรียนนี้

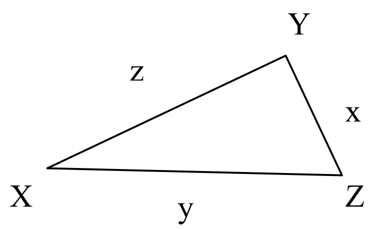
1. สมบัติสามเหลี่ยมคล้าย

พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากัน 3 คู่ ดังนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป มีมุมเท่ากันมุมต่อมุมทั้ง 3 คู่ แล้ว สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะคล้ายกัน ดังรูป



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูป

$$\hat{A} = \hat{X} \quad , \quad \hat{B} = \hat{Y} \quad , \quad \hat{C} = \hat{Z}$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม XYZ และจากสมบัติการคล้ายกันของ รูปสามเหลี่ยมจะได้ผลตามมาคือ

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{XZ} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

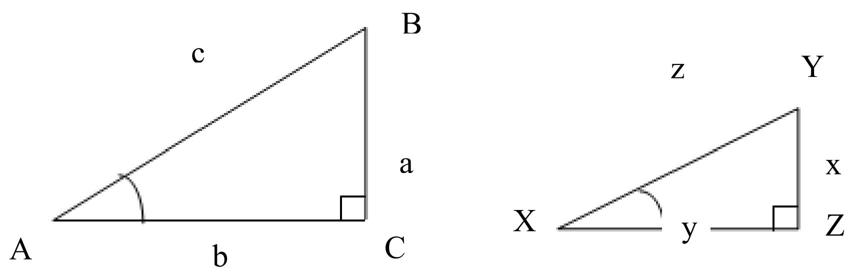
เมื่อ a,b,c เป็นความยาวของด้าน AB, BC และ AC ตามลำดับในสามเหลี่ยม ABC

x,y,z เป็นความยาวของด้าน XY,YZ และ XZ ตามลำดับในสามเหลี่ยม XYZ

จาก	$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$	จะได้ว่า	$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$
	$\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$	จะได้ว่า	$\frac{b}{c} = \frac{y}{z}$
	$\frac{a}{x} = \frac{c}{z}$	จะได้ว่า	$\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$

นั่นคือ ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จะเท่ากับอัตราส่วนของความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยที่ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่หาความยาวนั้นจะต้องเป็นด้านที่สมนัยกันอยู่ตรงข้ามกับมุมที่เท่ากัน

ในทำนองเดียวกัน ถ้ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุมที่ไม่เป็นมุมฉากเท่ากันสมมติว่าเป็นมุม A เท่ากับมุม X ดังรูป



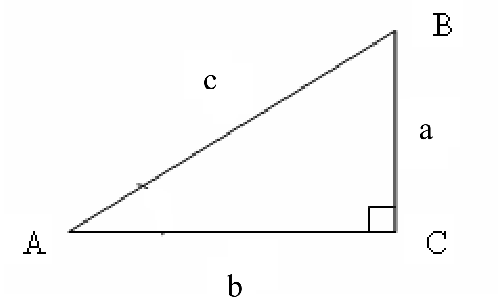
พบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกัน (มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม ทั้ง 3 คู่)

ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, $\frac{c}{b} = \frac{z}{y}$

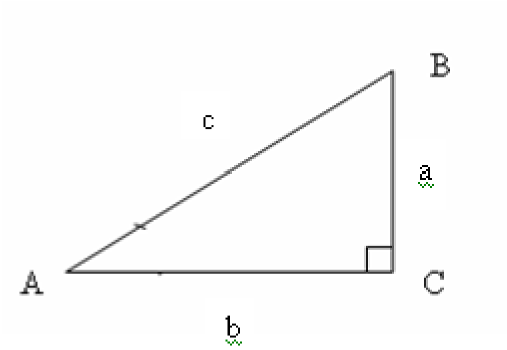
สรุป ไม่ว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวจะมีขนาดใหญ่หรือเล็กก็ตาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปคล้ายกันแล้ว อัตราส่วนความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะเท่ากับอัตราส่วนของความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งที่สมนัยกันเสมอ (ด้านที่กล่าวถึงนี้ต้องเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่เท่ากัน)

2. สมบัติสามเหลี่ยมมุมฉาก

ถ้าให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุมฉากที่ C และมี a , b , c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ



ด้าน $\overline{AB}$ เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากยาว c หน่วย เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก
ด้าน $\overline{BC}$ เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม A
ด้าน $\overline{AC}$ เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย เรียกว่า ด้านประชิดมุม A



ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม $\hat{ACB}$ เป็นมุมฉาก

c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังต่อไปนี้

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

เมื่อ a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

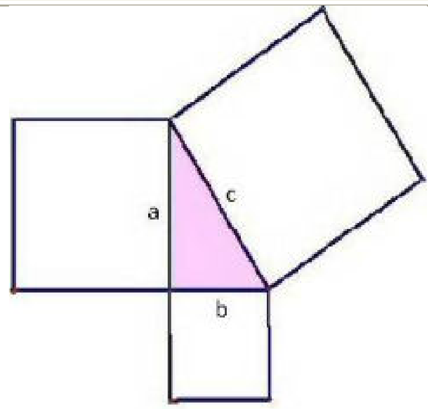
b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

ข้อควรรู้เกี่ยวกับ ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

ปีทาโกรัสได้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่เก่าแก่และมีชื่อเสียงที่สุดบทหนึ่ง ได้แก่ทฤษฎีบทปีทาโกรัส ซึ่งมีใจความว่า

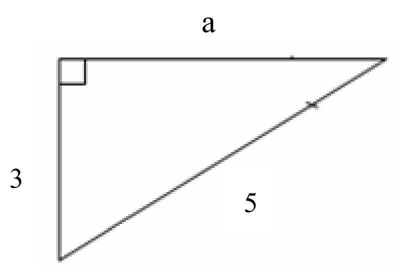
ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก
จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



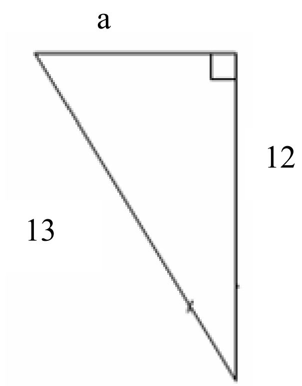
$c^2 = a^2 + b^2$

ตัวอย่าง จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ ตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

1).

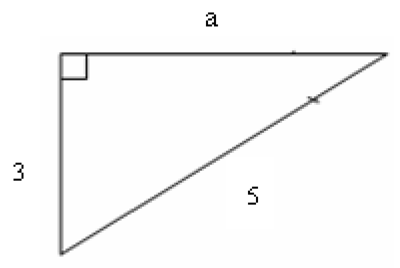


2).



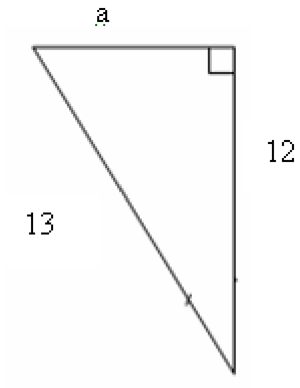
<u>วิธีทำ</u> พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส

1).



$$5^2 = a^2 + 3^2$$
$$a^2 + 9 = 25$$
$$a^2 = 16$$
ดังนั้น $a = 4$

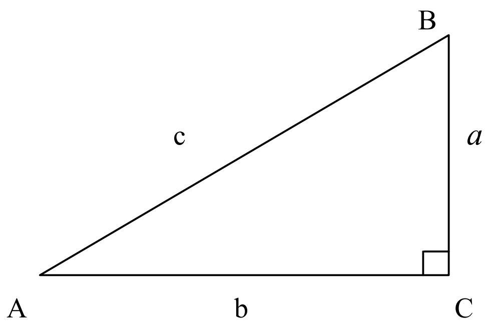
2).



$$a^2 + 12^2 = 13^2$$
$$a^2 + 144 = 169$$
$$b^2 = 25$$
ดังนั้น $b = 5$

<u>อัตราส่วนตรีโกณมิติ</u>

ถ้าให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมฉากที่ C และมี a , b , c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ



อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนที่เกิดจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $\frac{a}{c}$ เรียกว่า ไซน์ (sine) ของมุม A

2. อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิด มุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $\frac{b}{c}$ เรียกว่า โคไซน์ (cosine) ของมุม A

3. อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิด มุม A หรือ $\frac{a}{b}$ เรียกว่า แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A

เรียกอัตราส่วนทั้งสามนี้ว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติของ A เมื่อ A เป็นมุมแหลมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรืออาจสรุปได้ว่า

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

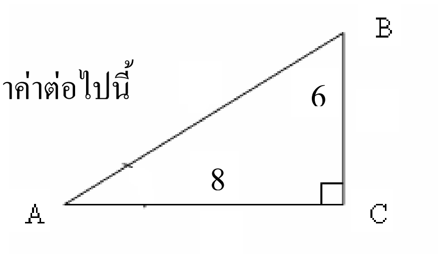
$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$$

ตัวอย่าง กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

มีมุม C เป็นมุมฉาก มีความยาวด้านทั้งสาม ดังรูป จงหาค่าต่อไปนี้

1. sin A, cos A และ tan A
2. sin B, cos B และ tan B



<u>วิธีทำ</u> กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้

ว่า $AB^2 = AC^2 + BC^2$

แทนค่า AC = 8 , BC = 6

ดังนั้น $AB^2 = 8^2 + 6^2$

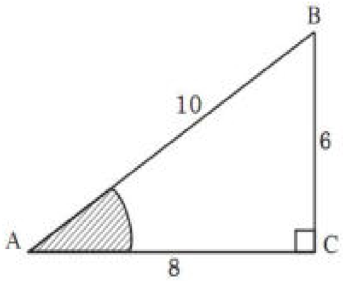
$AB^2 = 64 + 36$

$AB^2 = 100$

$AB^2 = 10 \times 10$ หรือ 10^2

นั่นคือ AB = 10

(1) หาค่า sin A, cos A และ tan A โดยการพิจารณาที่มุม A

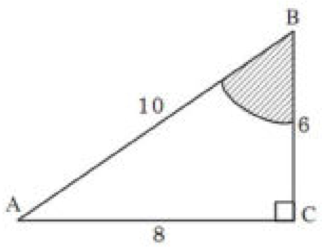


sin A = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

cos A = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

tan A = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

(2) หาค่า sin B, cos B และ tan B โดยการพิจารณาที่มุม B



sin B = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

cos B = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม B}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

tan B = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม B}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

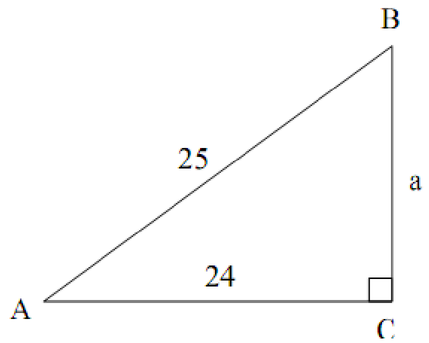
ข้อสังเกต *ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉากแล้วจะได้ว่า*

1. $\hat{A} + \hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 180^0 - 90^0 = 90^0$
2. sin A = cos B
3. cos A = sin B

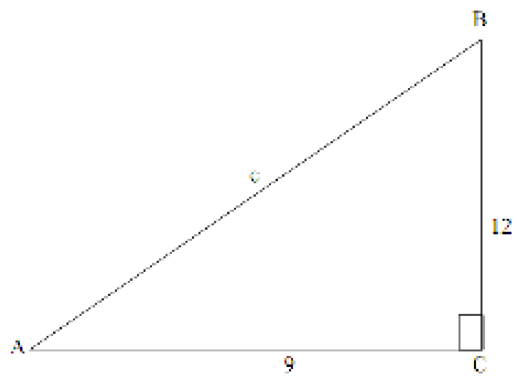
<u>แบบฝึกหัดที่ 1</u>

1. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนความสัมพันธ์ของความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส และหาความยาวของด้านที่เหลือ

(1)



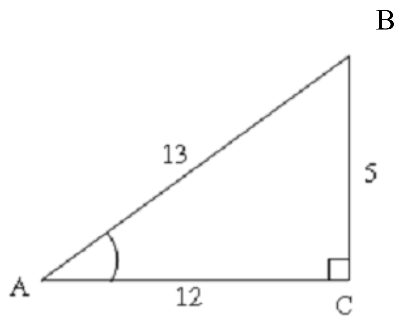
(2)



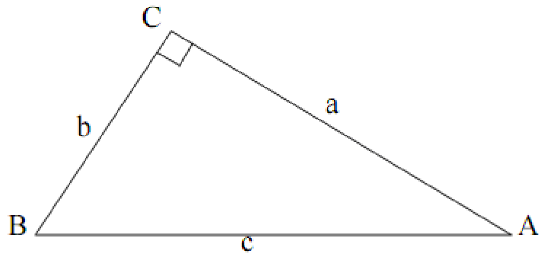
2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C} = 90^\circ$ และความยาวของด้านทั้งสาม ดังรูป

จงหา 1) sin A , cos A และ tan A

2) sin B , cos B และ tan B



3. จงหาว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นค่าไซน์(sin) หรือโคไซน์(cos) หรือแทนเจนต์(tan) ของมุมที่กำหนดให้



1)........................$A = \dfrac{b}{c}$

2)........................$B = \dfrac{b}{a}$

3)........................$A = \dfrac{a}{c}$

4)........................$A = \dfrac{b}{c}$

4. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มีด้าน AB = 10 และ AC = 8

จงหา 1) ความยาวด้าน BC

2) sin A , cos A และ tan A

3) sin B , cos B และ tan B

5. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, มุม B และมุม C ตามลำดับ

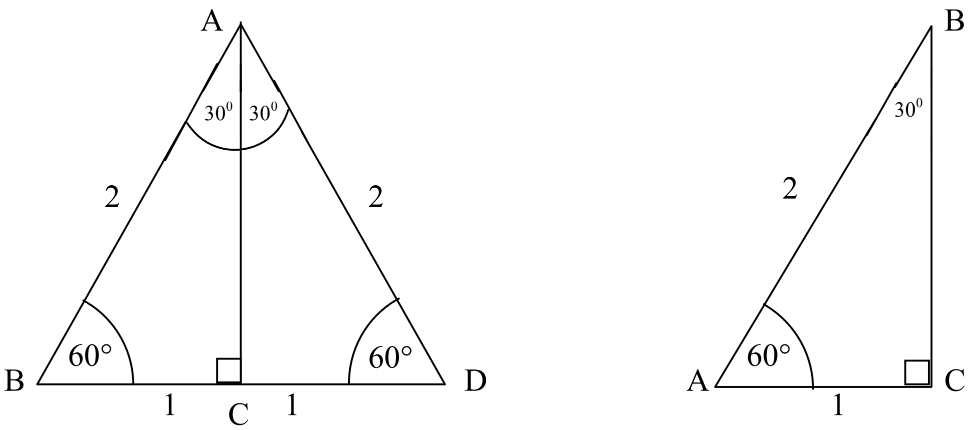
(1) ถ้า $\cot A = \sqrt{3}$ และ a = 5 จงหาค่า b,c

(2) ถ้า $\cos B = \dfrac{3}{5}$ และ a = 9 จงหาค่า tan A

เรื่องที่ 2 การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 ,45 , 60 องศา

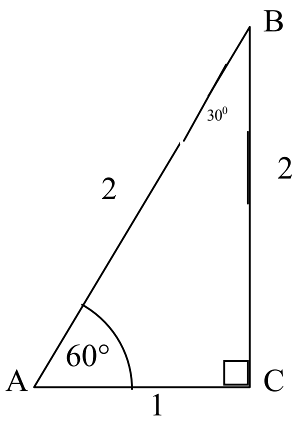
<u>การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 60 องศา</u>

พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD มีด้านยาวด้านละ 2 หน่วย ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD ลาก AC แบ่งครึ่ง มุม A เส้นแบ่งครึ่งมุม A จะตั้งฉากกับ BD ที่จุด C โดยใช้หลักของสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ABC และ ADC จะได้ BC = CD = 1 หน่วย ดังรูป และจาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ใช้คุณสมบัติของปีทาโกรัสได้ดังนี้



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$2^2 = 1^2 + BC^2$$

$$4 = 1 + BC^2$$

$$BC^2 = 4 - 1$$

$$BC^2 = 3$$

$$BC = \sqrt{3}$$

จะได้ว่า ด้าน BC = $\sqrt{3}$

ดังนั้น $\text{Sin } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{Tan } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

ในทำนองเดียวกัน

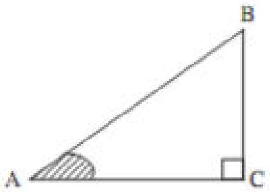
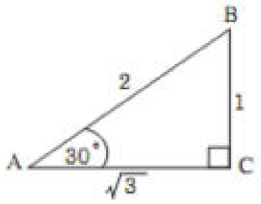
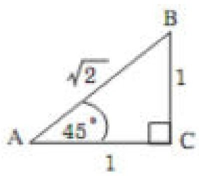
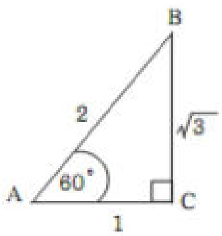
<u>การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 องศา</u>

ดังนั้น $\text{Sin } 30^0 = \frac{1}{2}$

$\text{Cos } 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Tan } 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

สรุป อัตราส่วนของตรีโกณมิติที่สำคัญ ดังนี้

	มุม A	ไซน์ของมุม A (sin A = $\frac{BC}{AB}$)	โคไซน์ของมุม A (cos A = $\frac{AC}{AB}$)	แทนเจนต์ของมุม A (tan A = $\frac{BC}{AB}$)
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

นั่นคือ $\sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\tan\ 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\cos\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\tan\ 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

$\sin\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos\ 60^0 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

<u>เกร็ดความรู้ การใช้นิ้วมือช่วยในการจำค่าตรีโกณมิติของมุมพื้นฐาน</u>

การจำค่าตรีโกณมิติพื้นฐานโดยใช้นิ้วมือ ต้องใช้มือซ้าย

วิธีการนี้ใช้จำค่าตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานกล่าวคือ 0°, 30°, 45°, 60°, 90° มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แบมือซ้ายออกมา มองเลขมุมจับคู่กับนิ้วเรียงจากซ้ายไปขวา เป็นมุม 0°, 30°, 45°, 60°, 90° องศา
2. เมื่อต้องการหาค่าตรีโกณมิติของมุมใดให้งอนิ้วนั้น สมมติว่าหา cos · ก็จะตรงกับนิ้วชี้ ก็งอนิ้วชี้เก็บไว้
3. ถือกฎว่า "sin-ซ้าย(ออกเสียงคล้ายกัน) cos-ขวา(ออกเสียง /k/ เหมือนกัน)" เมื่อหาค่าของฟังก์ชันใดให้สนใจจำนวนนิ้วมือฝั่งที่สอดคล้องกับฟังก์ชันนั้น
   - เพื่อจะหาค่า นำจำนวนนิ้วมือด้านที่สนใจติดรากที่สองแล้วหารด้วยสอง (หรืออาจจำว่ามีเลขสองตัวใหญ่ๆอยู่บนฝ่ามือ เมื่ออ่านก็จะเป็น รากที่สองของจำนวนนิ้วมือด้านที่สนใจหารฝ่ามือ) สำหรับ cos 30 ก็จะได้ว่ามีนิ้วมือเหลืออยู่ทางด้านขวาอีกสามนิ้ว (กลาง นาง ก้อย) ก็จะได้ cos30= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นก็ใช้สมบัติของฟังก์ชันนั้นกับ sin และ cos เช่น tan=sin/cos

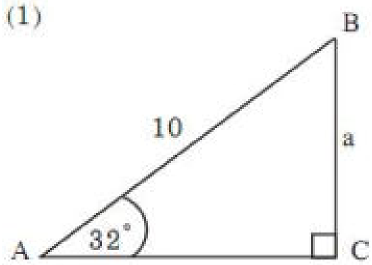
ค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ (ถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3) หาได้จากตารางต่อไปนี้ โดยที่ค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0^0 และ 90^0 จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

A	sin A	cos A	tan A
1°	.017	.999	.017
2°	.035	.999	.035
3°	.052	.999	.052
4°	.070	.998	.070
5°	.087	.996	.087
6°	.105	.995	.105
7°	.122	.993	.123
8°	.139	.990	.141
9°	.156	.988	.158
10°	.174	.985	.176
11°	.191	.982	.194
12°	.208	.978	.213
13°	.225	.974	.231
14°	.242	.970	.249
15°	.259	.966	.268
16°	.276	.961	.287
17°	.292	.956	.306
18°	.309	.951	.325
19°	.326	.946	.344
20°	.342	.940	.364
21°	.358	.934	.384
22°	.375	.927	.404
23°	.391	.921	.424
24°	.407	.914	.445
25°	.423	.906	.466
26°	.438	.899	.488
27°	.454	.891	.510
28°	.469	.883	.532
29°	.485	.875	.554
30°	.500	.866	.577

A	sin A	cos A	tan A
31°	.515	.857	.601
32°	.530	.848	.625
33°	.545	.839	.649
34°	.559	.829	.675
35°	.574	.819	.700
36°	.588	.809	.727
37°	.602	.799	.754
38°	.616	.788	.781
39°	.629	.777	.810
40°	.643	.766	.839
41°	.656	.755	.869
42°	.669	.743	.900
43°	.682	.731	.933
44°	.695	.719	.966
45°	.707	.707	1.000
46°	.719	.695	1.036
47°	.731	.682	1.072
48°	.743	.669	1.111
49°	.755	.656	1.150
50°	.766	.643	1.192
51°	.777	.629	1.235
52°	.788	.616	1.280
53°	.799	.602	1.327
54°	.809	.588	1.376
55°	.819	.574	1.428
56°	.829	.559	1.483
57°	.839	.545	1.540
58°	.848	.530	1.600
59°	.857	.515	1.664
60°	.866	.500	1.732

A	sin A	cos A	tan A
61°	.875	.485	1.804
62°	.883	.469	1.881
63°	.891	.454	1.963
64°	.899	.438	2.050
65°	.906	.423	2.145
66°	.914	.407	2.246
67°	.921	.391	2.356
68°	.927	.375	2.475
69°	.934	.358	2.605
70°	.940	.342	2.748
71°	.946	.326	2.904
72°	.951	.309	3.078
73°	.956	.292	3.271
74°	.961	.276	3.487
75°	.966	.259	3.732
76°	.970	.242	4.011
77°	.974	.225	4.331
78°	.978	.208	4.705
79°	.982	.191	5.145
80°	.985	.174	5.671
81°	.988	.156	6.314
82°	.990	.139	7.115
83°	.993	.122	8.144
84°	.995	.105	9.514
85°	.996	.087	11.430
86°	.998	.070	14.301
87°	.999	.052	19.081
88°	.999	.035	28.636
89°	.999	.018	57.290

ตัวอย่าง จงหาค่าของ a, b จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้



วิธีทำ $\sin 32^0 = \dfrac{BC}{AB}$

แทนค่า $\sin 32^0 = 0.530$ และ BC = a , AB = 10

ดังนั้น $0.530 = \dfrac{a}{10}$ นั่นคือ

$$a = 10 \times 0.530$$

$$a = 5.3$$

จงหาค่าต่อไปนี้

1.$\dfrac{\sin 45^0}{\cos 45^0} - \tan 45^0$

2.$\sin 30^0 \sin 60^0 + \cos 30^0 \cos 60^0$

3.$(\cos 30^0)^2 + (\sin 30^0)^2$

4.$\tan^2 30^0 + 2\sin 60^0 + \tan 45^0 - \tan 60^0 + \cos^2 30^0$

5.$\cos 60^0 - \tan^2 45^0 + \dfrac{4}{3}\tan^2 30^0 + \cos^2 30^0 - \sin 30^0$

วิธีทำ

1.$\dfrac{\sin 45^0}{\cos 45^0} - \tan 45^0 = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{1} - 1 = 1 - 1 = 0$

2.$\sin 30^0 \sin 60^0 + \cos 30^0 \cos 60^0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3.$(\cos 30^0)^2 + (\sin 30^0)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

4.$\tan^2 30^0 + 2\sin 60^0 + \tan 45^0 - \tan 60^0 + \cos^2 30^0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 - \sqrt{3} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{25}{12}$$

5.$\cos 60^0 - \tan^2 45^0 + \dfrac{4}{3}\tan^2 30^0 + \cos^2 30^0 - \sin 30^0 = \dfrac{1}{2} - (1)^2 + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{9} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{36}$$

<u>อัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ</u>

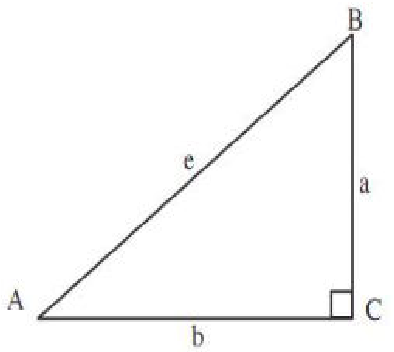
อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เรียกว่า ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ เรียกว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric ratio) ซึ่งเป็นหลักเบื้องต้นในคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ที่เรียกว่า ตรีโกณมิติ (Trigonometry) หมายถึงการวัดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม

มีอัตราส่วนตรีโกณมิติอีก 3 อัตราส่วน ซึ่งกำหนดด้วยบทนิยาม ดังนี้

1. ซีแคนต์ของมุม A เขียนแทนด้วย secant A หรือ sec A คือส่วนกลับของ cos A เมื่อ cos A $\neq 0$ นั่นคือ sec A = $\frac{1}{\cos A}$ เมื่อ $\cos A \neq 0$

2. โคซีแคนต์ของมุม A เขียนแทนด้วย cosecant A หรือ cosec A คือส่วนกลับของ sin A เมื่อ sin A $\neq 0$ นั่นคือ cosec A = $\frac{1}{\sin A}$ เมื่อ $\sin A \neq 0$

3. โคแทนเจนต์ของมุม A เขียนแทนด้วย cotangent A หรือ cot A คือส่วนกลับของ tan A เมื่อ tan A $\neq 0$ นั่นคือ cotangent A = $\frac{1}{\tan A}$ เมื่อ $\tan A \neq 0$



จากรูป $\sin A = \frac{a}{c}$; $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$

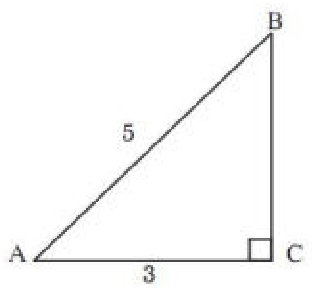
$\cos A = \frac{b}{c}$; $\sec A = \frac{c}{b}$

$\tan A = \frac{a}{b}$; $\cot A = \frac{b}{a}$

ตัวอย่างที่ 14 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก และ sec A = $\frac{5}{3}$ จงหา

(1) cos A (2) sin A (3) tan A (4) cosec A (5) cot A

วิธีทำ



กำหนด $\sec A = \frac{5}{3}$

เนื่องจาก $\sec A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

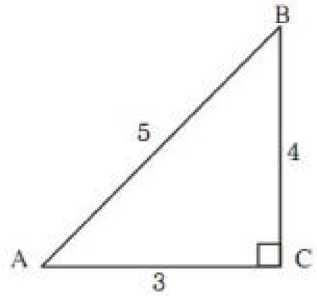
ให้ AC = 3 และ AB = 5 จะได้ $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$BC^2 + 3^2 = 5^2$

$BC^2 = 25 - 9 = 16$

$BC = 4$

จะได้ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติดังนี้



(1) $\cos A = \frac{3}{5}$

(2) $\sin A = \frac{4}{5}$

(3) $\tan A = \frac{4}{3}$

(4) $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$

(5) $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   1) $\sin 30^0 \sin 60^0 - \cos 30^0 \cos 60^0$

   2) $(\sin 60^0)^2 + (\cos 60^0)^2$

   3) $1 - \tan 45^0$

2. จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้จากตาราง

   1) $\sin 20^0$

   2) $\sin 38^0$

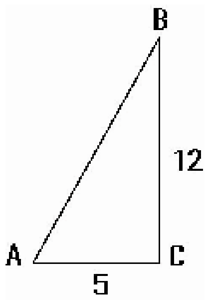
   3) $\cos 50^0$

   4) $\cos 52^0$

   5) $\tan 77^0$

   6) $\tan 89^0$

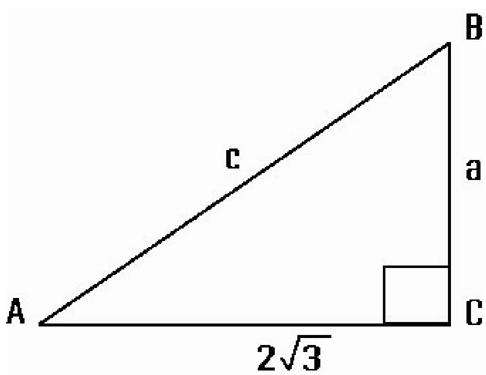
3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูป



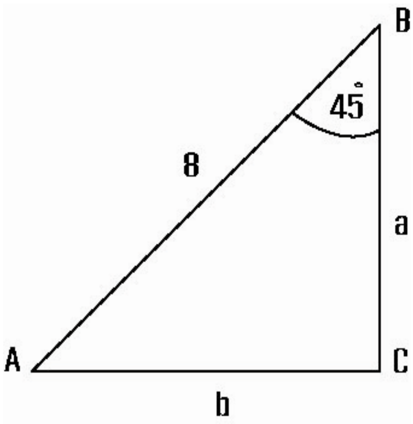
จงหา cos B, sin B, tan B, sec B, cosec B, cot B

4. จงหาค่า a, b หรือ c จากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

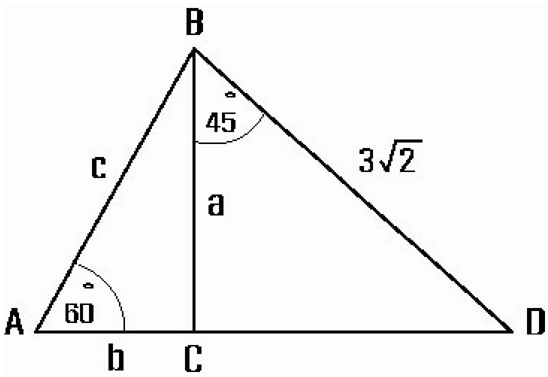
(1)



(2)



(3)



5. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, มุม B และมุม C ตามลำดับ

(1) ถ้า cot A = $\sqrt{3}$ และ a = 5 จงหาค่า b,c

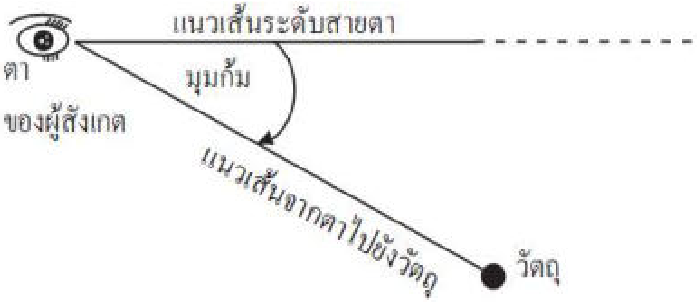
(2) ถ้า cos B = $\frac{3}{5}$ และ a = 9 จงหาค่า tan A

เรื่องที่ 3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับหาระยะทางและความสูงและการวัด

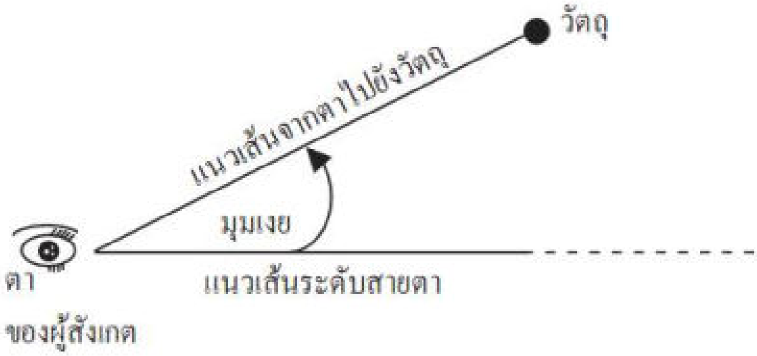
อัตราส่วนตรีโกณมิติมีประโยชน์มากในการหาความยาว ระยะทางหรือส่วนสูงโดยที่ทราบค่ามุมใดมุมหนึ่ง และความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วจะสามารถหาด้านที่เหลือได้

เส้นระดับสายตา คือ เส้นที่ขนานกับแนวพื้นราบ

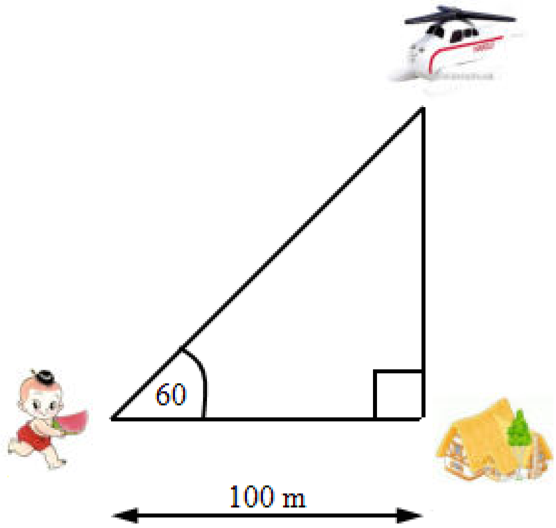
มุมก้ม คือ มุมที่แขนข้างหนึ่งของมุม อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา



มุมเงย คือ มุมที่แขนข้างหนึ่งอยู่สูงกว่าเส้นระดับสายตา



ตัวอย่างที่ 1 สมพรยืนอยู่ห่างจากบ้านหลังหนึ่งเป็นระยะทาง 100 เมตร เขาเห็นเครื่องบิน เครื่องหนึ่งบินอยู่เหนือหลังคาบ้านพอดี และแนวที่เขามองเป็นมุมเงย 60 องศา จงหาว่าเครื่องบิน อยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร



วิธีทำ

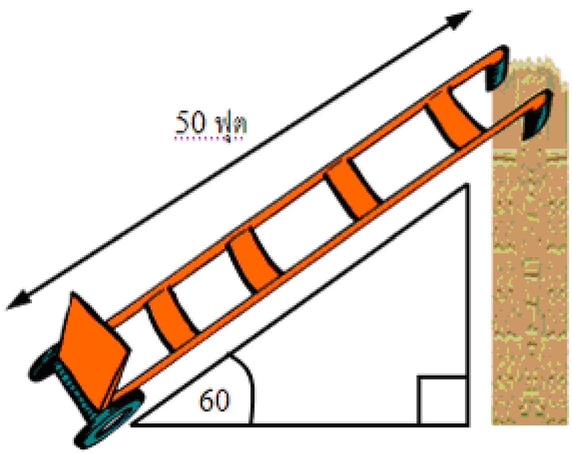
$$\text{Tan } 60 = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม 60}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม 60}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม 60}}{100}$$

นั่นคือ ความยาวของด้านตรงข้ามมุม $60^0 = 100\sqrt{3}$

จะเห็นได้ว่า ความสูงของเครื่องบินอยู่ห่างจากพื้นดิน $100\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 2 บันไดยาว 50 ฟุต พาดอยู่กับกำแพง ปลายบันไดถึงขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดทำมุม 60^0 กับกำแพง จงหาว่าบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเท่าไร



วิธีทำ COS 60^0 = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

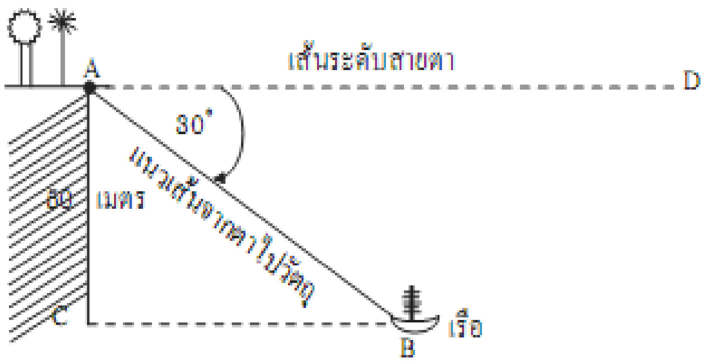
$\dfrac{1}{2}$ = $\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ}{50}$

จะได้ ความยาวของด้านประชิดมุม $60^\circ = \dfrac{50}{2}$

ดังนั้น ระยะระหว่างบันไดกับกำแพงเท่ากับ 25 ฟุต

ตัวอย่างที่ 3 สมพรยืนอยู่บนหน้าผาสูงชันแห่งหนึ่ง ซึ่งสูงจากระดับผนํ้าทะเล 50 เมตร เมื่อเขาทอดสายตาไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล มุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับมีขนาด 30 องศา เรือลำนี้อยู่ห่างจากฝั่งโดยประมาณกี่เมตร

วิธีทำ



ให้ A เป็นตำแหน่งที่สมพรยืนอยู่

AC แทนระยะความสูงจากน้ำทะเลของหน้าผา คือ 50 เมตร

BC เป็นระยะที่เรืออยู่ห่างจากฝั่ง

จาก AD // BC จะได้ $C\hat{B}A = D\hat{A}B = 30^0$

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $\tan 30^0 = \dfrac{AC}{BC}$

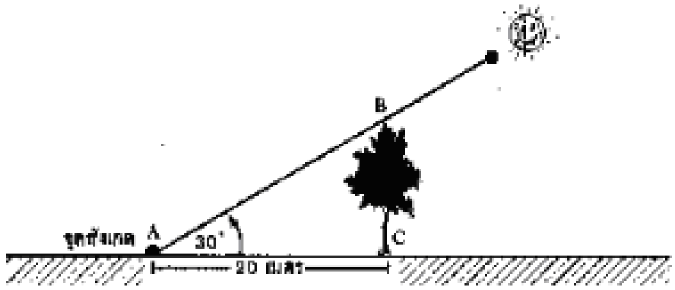
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = 50\sqrt{3} \approx 50 \times 1.732$$

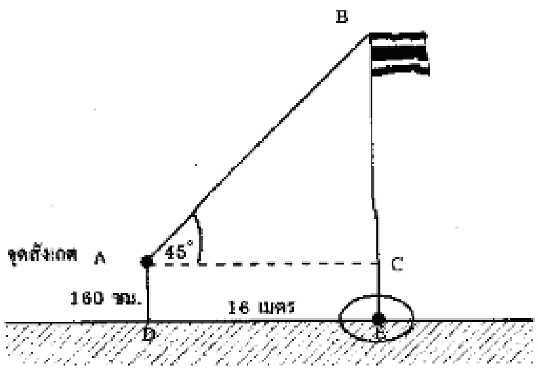
$$BC \approx 86.6$$

แบบฝึกหัดที่ 3

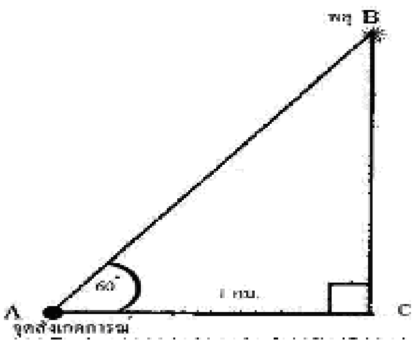
1. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 20 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านปลายของเงาต้นไม้ และยอดต้นไม้ ทำมุม 30 องศา กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้



2. วินัยต้องการหาความสูงของเสาธงโรงเรียน จึงทำมุมขนาด 45 องศา เพื่อใช้ในการเล็งไปที่ยอดเสาธง ถ้าในขณะที่เล็งนั้นเขามองไปที่ยอดเสาธงได้พอดี เมื่อก้าวไปอยู่ที่จุดซึ่งอยู่ห่างโคนเสาธง 16 เมตร วินัยมีความสูง 160 เซนติเมตร จงหาว่าเสาธงสูงประมาณกี่เมตร



4. จุดพลุขึ้นไปในแนวดิ่ง โดยกำหนดจุดสังเกตการณ์บนพื้นดินห่างจากตำแหน่งที่จุดพลุ 1 กิโลเมตร ในขณะที่มองเห็นพลุทำมุม 60 องศา กับพื้นดิน พลุขึ้นไปสูงเท่าใด และอยู่ห่างจากจุดสังเกตการณ์เป็นระยะทางเท่าใด



บทที่ 6
การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

สาระสำคัญ

1. การเลือกใช้เครื่องมือต่าง ๆ ในการสร้างรูปเรขาคณิต
2. ในชีวิตประจำวัน การออกแบบวัสดุหรือครุภัณฑ์ อาคารที่พักอาศัย หรืออาคารสำนักงานต่าง ๆ จะเกี่ยวข้องกับรูปแบบ การเลื่อนขนาน การหมุน และการสะท้อน
3. การมีบรรจุภัณฑ์ของสินค้าที่ดี สวยงาม น่าสนใจ จะมีส่วนช่วยในการการเพิ่มมูลค่าของสินค้านั้น ๆ ได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. สร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือได้
2. วิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างรูปต้นแบบ และรูปที่ได้จากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุนได้
3. นำสมบัติเกี่ยวกับการเลื่อนขนาน การหมุน และการสะท้อนจากการแปลงทางเรขาคณิตศาสตร์และทางเรขาคณิต ไปใช้ในการออกแบบ งานศิลปะได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การสร้างรูปทางเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือ

เรื่องที่ 2 การแปลงทางเรขาคณิต

เรื่องที่ 3 การออกแบบเพื่อการสร้างสรรค์งานศิลปะโดยใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์ และทางเรขาคณิต

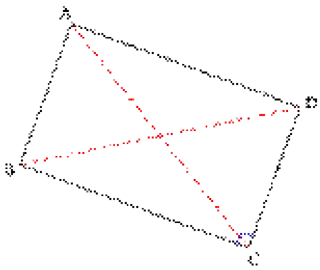
เรื่องที่ 1 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือ

1.1 รูปเรขาคณิตสองมิติ สามารถสร้างได้โดยใช้เส้นตรง เช่น ไม้บรรทัด ฟุตเหล็ก ไม้ฉาก ไม้ที เพื่อวัดความยาว ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ เพื่อวัดมุม หรือขนาดของมุม ใช้วงเวียน เพื่อประกอบการสร้างเส้นโค้งที่แทนความยาวรอบวงกลม หรือช่วยในการสร้างมุมที่มีขนาดที่ต้องการ

สมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตและความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต

เพื่อให้นักศึกษามีความเข้าใจในการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติ ผู้เรียนควรทบทวนสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติดังนี้

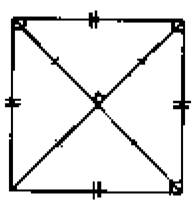
1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



1. มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก
2. ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันยาวเท่ากันสองคู่และขนานกัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกันและกัน
4. พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความยาวของด้านกว้าง x ความยาวของด้านยาว
5. ความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

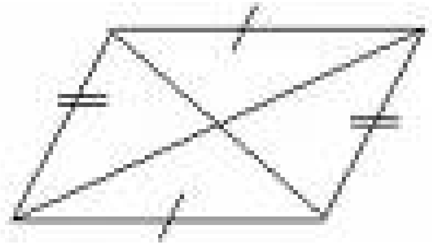
= (2 x ความยาวของด้านกว้าง) + (2 x ความยาวของด้านยาว)

2. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



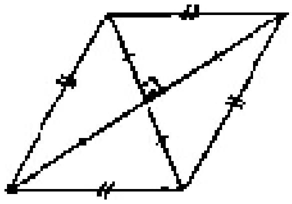
1. มุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก
2. ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกัน
4. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ความยาวด้าน x ความยาวด้าน หรือ $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวเส้นทแยงมุม

3. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



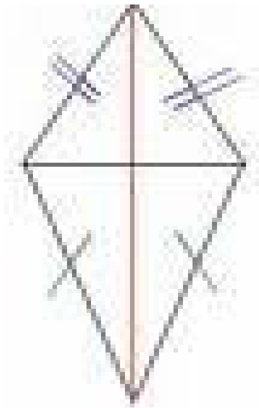
1. มีด้านตรงกันยาวเท่ากันและขนานกันสองคู่
2. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกันและกัน แต่ยาวไม่เท่ากัน
3. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน X ส่วนสูง

4. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



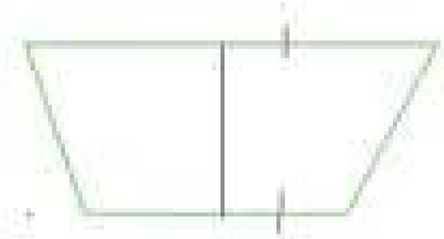
1. มีด้านตรงข้ามกันขนานกันสองคู่
2. ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกัน
4. พื้นที่รูปสามเหลี่ยมขนมเปียกปูน = ความยาวฐาน x ส่วนสูง หรือ $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

5. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



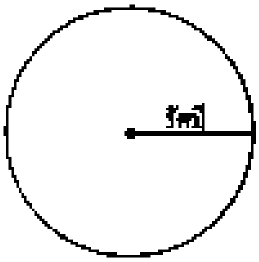
1. มีด้านประชิดกันยาวเท่ากัน 2 คู่
2. เส้นทแยงมุมสองเส้นตั้งฉากกัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แต่ยาวไม่เท่ากัน
4. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว = $\frac{1}{2}\times$ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

6. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



1. มีด้านขนานกัน 1 คู่
2. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}\times$ ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน $\times$ ส่วนสูง

7. รูปวงกลม

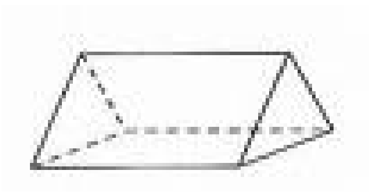


1. ระยะทางจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงเป็นระยะที่เท่ากันเสมอ เรียกว่า รัศมีของวงกลม
2. เส้นผ่านศูนย์กลางยาวเป็น 2 เท่าของรัศมี
3. พื้นที่วงกลม = πr^2
4. ความยาวเส้นรอบรูปของวงกลม $2\pi r$

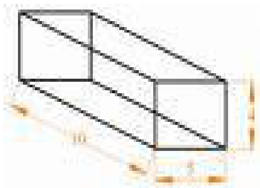
1.2 รูปเรขาคณิตสามมิติ

รูปเรขาคณิต สามมิติสามารถแสดงรูปร่างซึ่งมีทั้งความกว้าง ความยาว ความสูง หรือความหนา ตัวอย่างรูปทรงเรขาคณิตสามมิติ เช่น

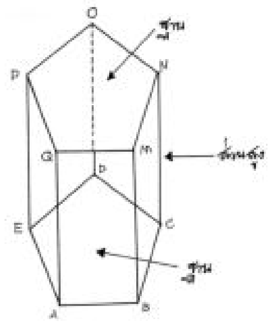
ปริซึม เป็นรูปสามมิติที่มีหน้าตัดหัวท้ายเท่ากันและขนานกันและผิวด้านข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยม เช่น



ปริซึมสามเหลี่ยม

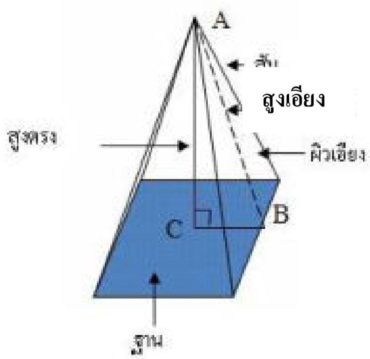


ปริซึมสี่เหลี่ยม

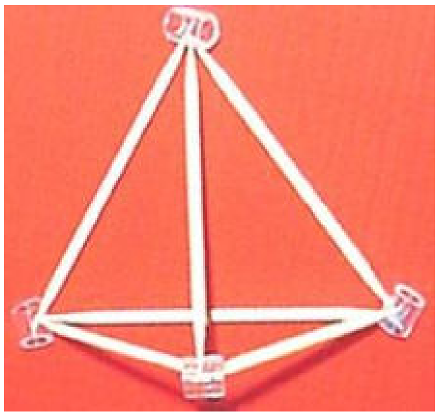


ปริซึมห้าเหลี่ยม

พีระมิด เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มียอดแหลม ผิวด้านข้างเป็นรูปสามเหลี่ยม



พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม

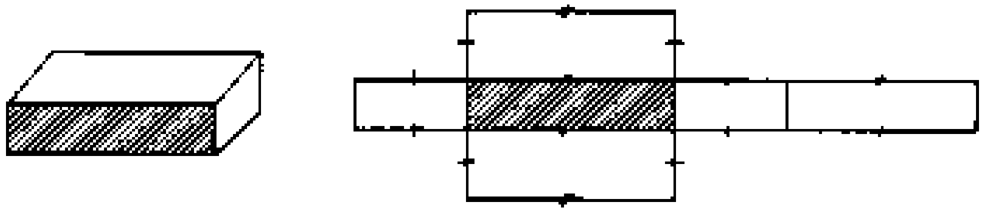


พีระมิดฐานสามเหลี่ยม

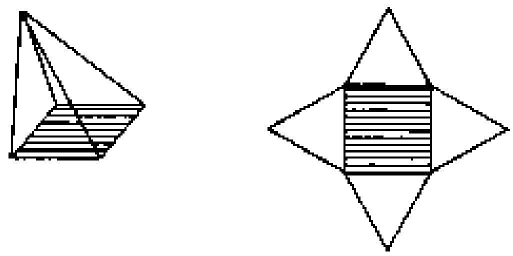
ตัวอย่างรูปเรขาคณิตสามมิติที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น ตู้เย็น เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือปริซึมสี่เหลี่ยม ปลากระป๋อง เป็นรูปทรงกระบอก ไอศกรีม เป็นรูปกรวยกลม เป็นต้น

รูปเรขาคณิตที่พบในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะรูปเรขาคณิตสามมิติและสองมิติ มีความสัมพันธ์กันอย่างมาก ซึ่งต้องใช้การสังเกตหาความสัมพันธ์ การจำแนก การเปรียบเทียบภาพที่มองเห็นจะสามารถอธิบายขนาด ตำแหน่ง ระยะทาง และใช้การคาดเดารูปร่างของสิ่งที่กำหนดให้ เมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือมุมมองในด้านต่าง ๆ

1.3 การคลี่รูปเรขาคณิตสามมิติ ภาพที่ได้จะเป็นภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติ เช่น การคลี่รูปปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



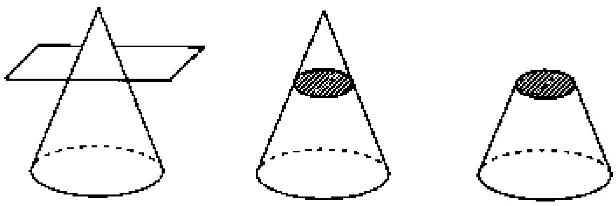
การคลี่รูปพีระมิด ฐานสี่เหลี่ยม



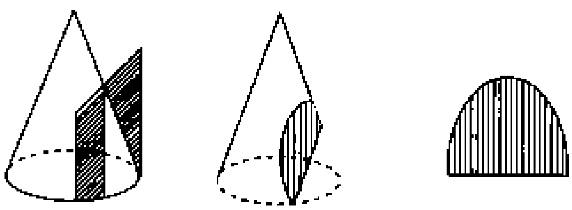
1.4 การตัดขวางรูปเรขาคณิตสามมิติ

เมื่อนำรูปเรขาคณิตสองมิติมาตัดขวางรูปเรขาคณิตสามมิติในแนวต่าง ๆ กัน ภาพที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะต่าง ๆ กัน เช่น

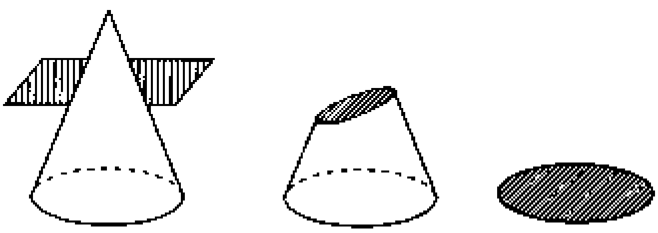
กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบในแนวขนานกับฐานกรวย จะได้ภาพสองมิติเป็นรูปวงกลม



กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบในแนวตั้งฉากกับฐานกรวย จะได้ภาพเป็นรูปพาลาโบลา

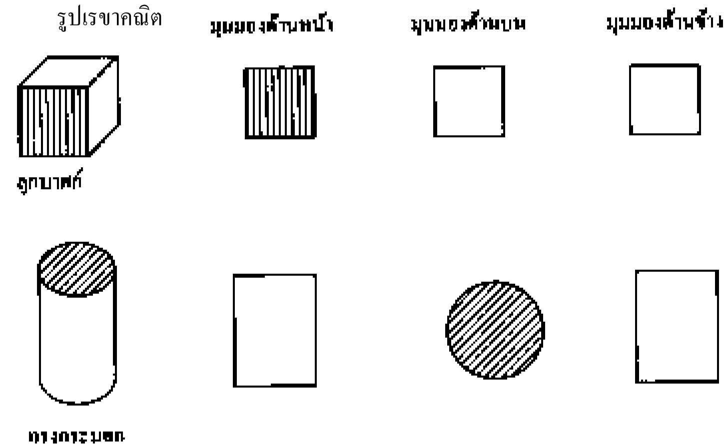


กรวยกลม เมื่อตัดด้วยระนาบที่ไม่ขนานกับฐานและไม่ตั้งฉากกับฐาน จะได้ภาพเป็นวงรี



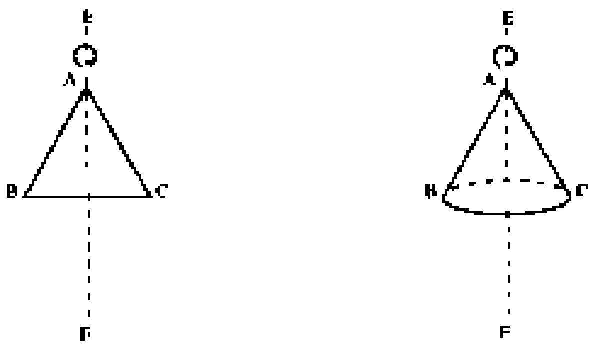
1.5 มุมมองของรูปเรขาคณิตสามมิติ

รูปเรขาคณิตที่พบเห็นในชีวิตประจำวันมีรูปร่างและสิ่งที่มองเห็นจากการเปลี่ยนมุมมองแต่ละด้านแตกต่างกัน เช่น



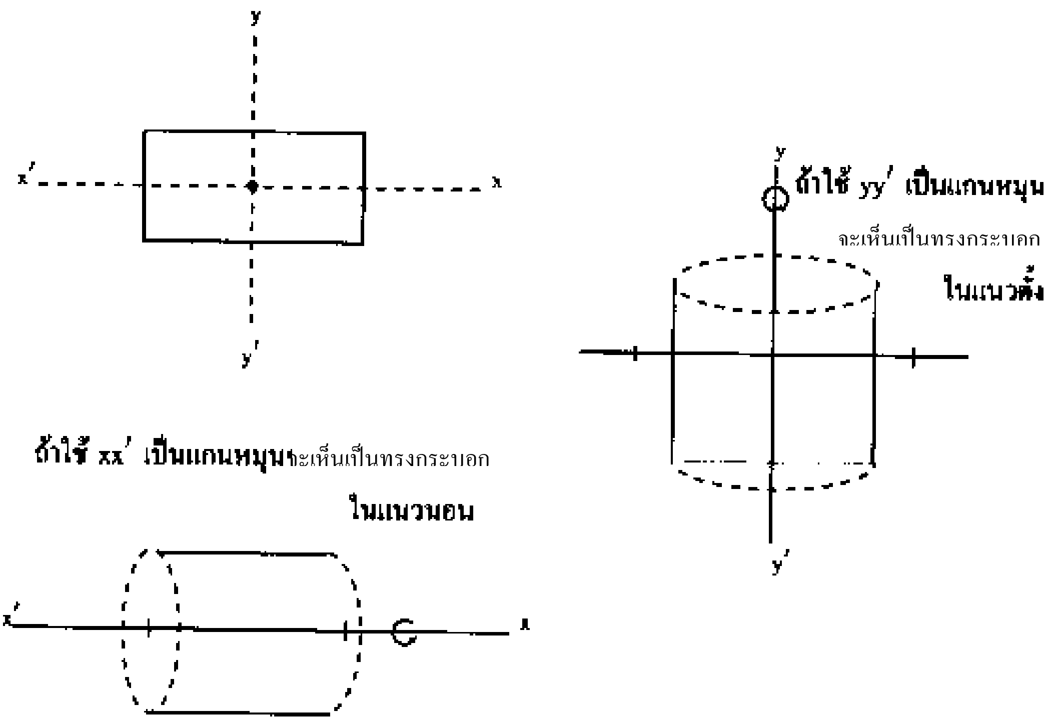
1.6 รูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนรูปเรขาคณิตสองมิติ

1) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มีแกน EF เป็นแกนสมมาตร ถ้านำรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC หมุนรอบแกนสมมาตร EF จะเห็นเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ “กรวยกลม”



2) แผ่นกระดาษแข็งรูปวงกลม เป็นรูปเรขาคณิตสองมิติ ถ้าใช้เส้นผ่านศูนย์กลาง yy' เป็นแกนหมุนรูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนจะเห็นเป็นลักษณะ “ทรงกลม”

3) กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นรูปเรขาคณิตที่มีแกนสมมาตรสองแกน



1.7 การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ

การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติอย่างง่ายอาจใช้ขั้นตอนดังในตัวอย่างต่อไปนี้

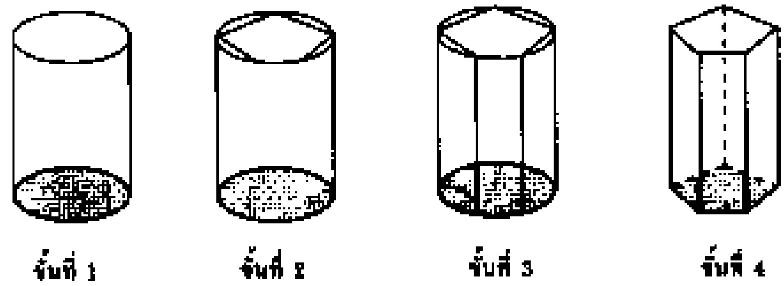
1. การเขียนภาพของทรงกระบอก

ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2

ขั้นที่ 1 เขียนวงรีแทนหน้าตัดที่เป็นวงกลม และเขียนส่วนของเส้นตรงสองเส้น แสดงส่วนสูงของทรงกระบอก ดังรูป

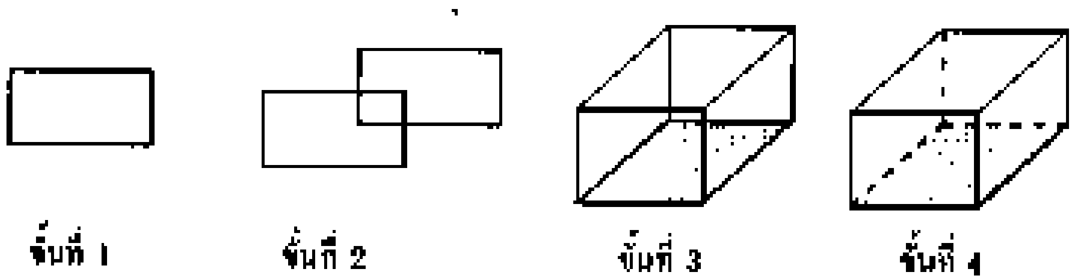
ขั้นที่ 2 เขียนวงรีที่มีขนาดเท่ากับวงรีที่ใช้ในขั้นที่ 1 แทนวงกลมซึ่งเป็นฐานของทรงกระบอกและเขียนเส้นประแทนเส้นทึกตรงส่วนที่ถูกบัง

2. การเขียนภาพของปริซึม

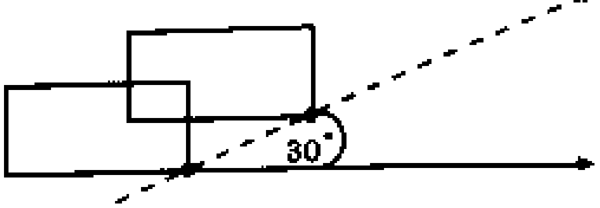


ขั้นที่ 1 เขียนทรงกระบอกตามวิธีการข้างต้น
ขั้นที่ 2 กำหนดจุดบนวงรีด้านบนเพื่อใช้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึมตามต้องการ แล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดเหล่านั้น
ขั้นที่ 3 เขียนส่วนสูงของปริซึมจากจุดยอดของรูปเหลี่ยมที่ได้ในขั้นที่ 2 มาตั้งฉากกับวงรีด้านล่าง
ขั้นที่ 4 เขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดบนวงรีที่ได้ในขั้นที่ 3 และลบรอยส่วนโค้งของวงรี จะได้รูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึม แล้วเขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

3. การเขียนภาพของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ขั้นที่ 1 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป
ขั้นที่ 2 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเท่ากันกับรูปในขั้นที่ 1 อีก 1 รูป ให้อยู่ในลักษณะที่ขนานกัน และเหลื่อมกันประมาณ 30 องศา ดังรูป



ขั้นที่ 3 ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดให้ได้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ขั้นที่ 4 เขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

สำหรับการเขียนภาพของกรวย ทรงกลม และพีระมิดก็สามารถเขียนได้โดยใช้วิธีการเดียวกันกับข้างต้นซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

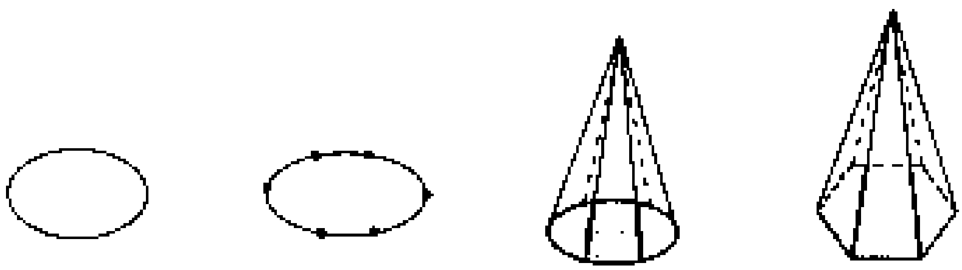
4. การเขียนภาพของกรวย

ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2

5. การเขียนภาพของทรงกลม

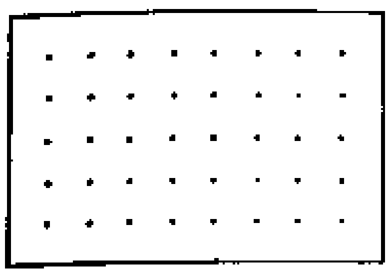
ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2

6. การเขียนภาพของพีระมิดฐานหกเหลี่ยม

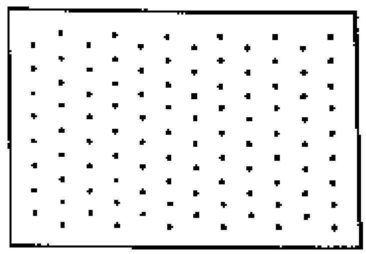


ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 4

นอกจากจะใช้วิธีการดังกล่าวข้างต้นในการเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติแล้ว อาจใช้กระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู (Geoboard) หรือกระดาษจุดไอโซเมตริก (Isometric dot paper) ช่วยในการเขียนภาพนั้น ๆ

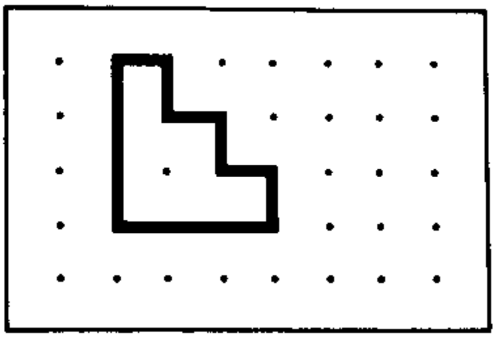


กระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู



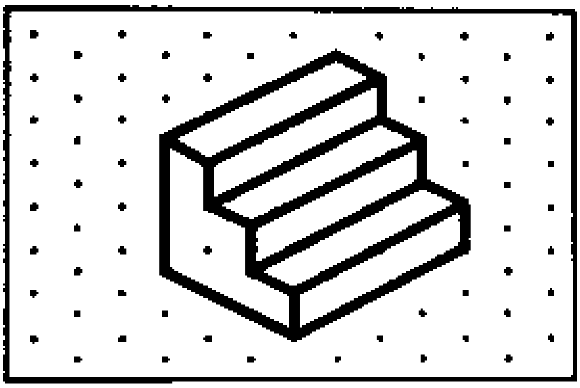
กระดาษจุดไอโซเมตริก

การเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติบนกระดาษที่มีจุดเหมือนกระดานตะปู ดังตัวอย่าง



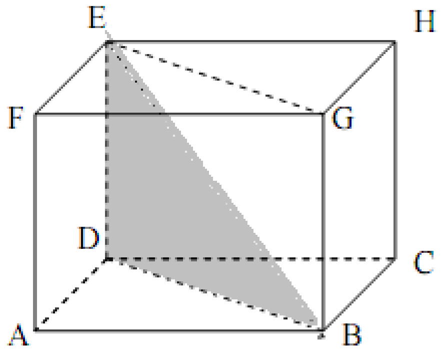
นอกจากนี้ยังนิยมเขียนภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติบนกระดาษจุดไอโซเมตริก ภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติที่เขียนอยู่ในลักษณะนี้เรียกว่า ภาพแบบไอโซเมตริก

การเขียนภาพแบบไอโซเมตริกบนกระดาษจุดไอโซเมตริกจะเขียนส่วนของเส้นตรงที่เป็นด้านกว้าง ด้านยาว ตามแนวของจุดซึ่งเอียงทำมุมขนาด 30 องศา กับแนวนอนและเขียนส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนสูง ตามแนวของจุดในแนวตั้ง ดังตัวอย่าง



แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดมุมสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ก. สี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด

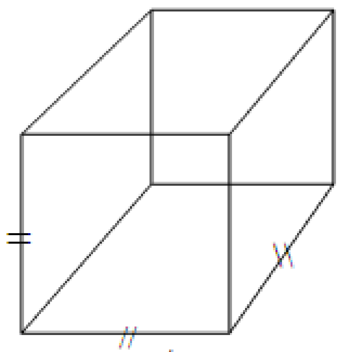
ข. $B\hat{D}E$ มีขนาดกี่องศา

ค. สี่เหลี่ยม BDEG เกิดจากการใช้ระนาบตัดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากตามแนวใด

ง. สามเหลี่ยม BDE เกี่ยวข้องกับ สี่เหลี่ยม BDEG อย่างไร

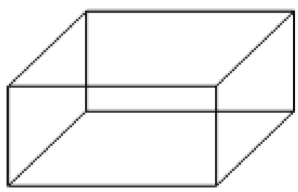
2. จงเขียนรูปคลี่ของทรงสามมิติต่อไปนี้

(1)

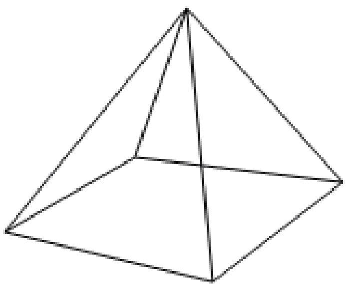


รูปลูกบาศก์

(2)

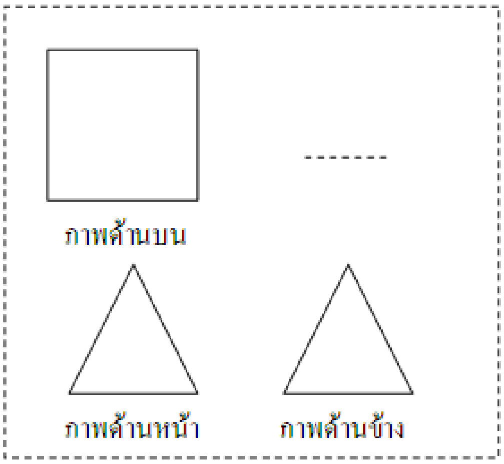


(3)

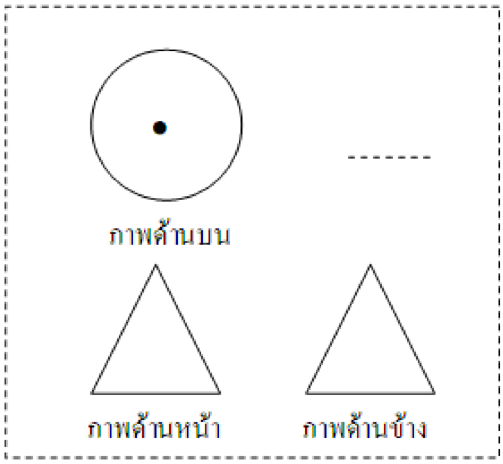


3. จงเขียนรูปทรงสามมิติจากมุมมองภาพด้านบน ภาพด้านหน้า ภาพด้านข้างที่กำหนดให้

(1)



(2)

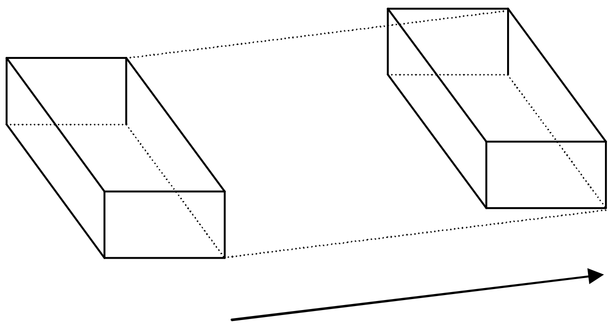


เรื่องที่ 2 การแปลงทางเรขาคณิต

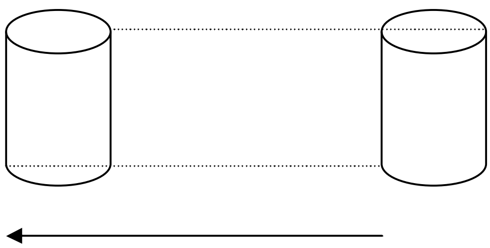
เป็นคำศัพท์ที่ใช้เรียกการดำเนินการใด ๆ ทางเรขาคณิต ทั้งในสองมิติและสามมิติ เช่น การเลื่อนขนาน การหมุน การสะท้อน

2.1 การเลื่อนขนาน (Translation)

การเลื่อนขนานต้องมีรูปต้นแบบ ทิศทางและระยะทางที่ต้องการเลื่อนรูป การเลื่อนขนานเป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการเลื่อนรูปต้นแบบไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งด้วยระยะทางที่กำหนด จุดแต่ละจุดบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานจะห่างจากจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบเป็นระยะทางเท่ากัน การเลื่อนในลักษณะนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “สไลด์ (slide)” ดังตัวอย่างในภาพที่ 1 และภาพที่ 2



ภาพที่ 1



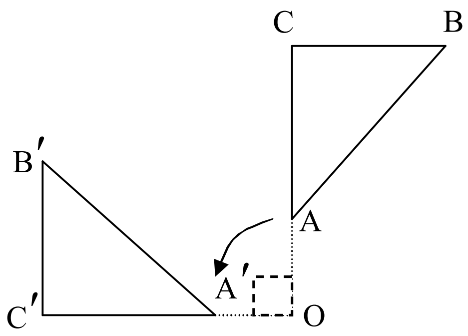
ภาพที่ 2

2.2 การหมุน (Rotation)

การหมุนจะต้องมีรูปต้นแบบ จุดหมุนและขนาดของมุมที่ต้องการในรูปนั้น การหมุนเป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการหมุน โดยที่จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยขนาดของมุมที่กำหนด จุดหมุนจะเป็นจุดที่อยู่นอกรูปหรือบนรูปก็ได้ การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้ โดยทั่วไปเมื่อไม่ระบุไว้การหมุนรูปจะเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

บางครั้งถ้าการหมุนตามเข็มนาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ $-x^\circ$

หรือ ถ้าการหมุนทวนเข็มนาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ x°



จากรูป เป็นการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน ซึ่งจุดหมุนเป็นจุดที่อยู่นอกรูปสามเหลี่ยม ABC รูป $A'B'C'$ เป็นรูปที่ได้จากการหมุน 90° และจะได้ว่า ขนาดของมุม AOA' เท่ากับ 90° BOB' เท่ากับ 90° COC' เท่ากับ 90°

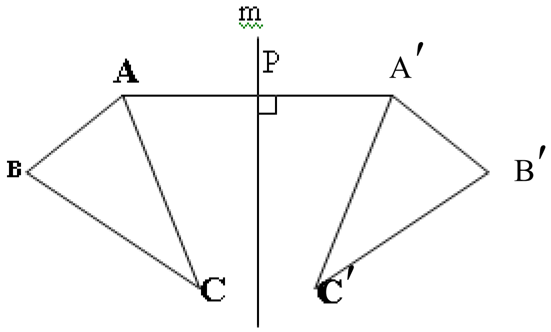
2.3 การสะท้อน (Reflection)

การสะท้อนต้องมีรูปต้นแบบที่ต้องการสะท้อนและเส้นสะท้อน (Reflection line หรือ Mior line) การสะท้อนรูปข้ามเส้นสะท้อนเสมือนกับการพลิกรูปข้ามเส้นสะท้อนหรือการดูเงาสะท้อนบนกระจกเงาที่วางบนเส้นสะท้อน การสะท้อนเป็นการแปลงที่มีการจับคู่กันระหว่างจุด แต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อน โดยที่

1. รูปที่เกิดจากการสะท้อนมีขนาดและรูปร่างเช่นเดิม หรือกล่าวว่ารูปที่เกิดจากการสะท้อนเท่ากันทุกประการกับรูปเดิม

2. เส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อนที่สมนัยกัน นั่นคือระยะระหว่างจุดต้นแบบและเส้นสะท้อนเท่ากับระยะระหว่างจุดสะท้อนและเส้นสะท้อน

ตัวอย่าง

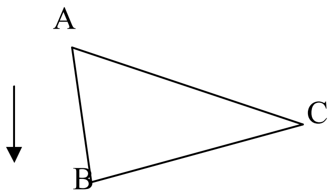


จากรูป รูปสามเหลี่ยม A′B′C′ เป็นรูปสะท้อนของรูปสามเหลี่ยม ABC ข้ามเส้นสะท้อน m รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม A′B′C′ ส่วนของเส้นตรง AA′ ตั้งฉากกับเส้นสะท้อน m ที่จุด P และระยะจากจุด A ถึงเส้น m เท่ากับระยะจากเส้น m ถึงจุด A′ (AP = PA′)

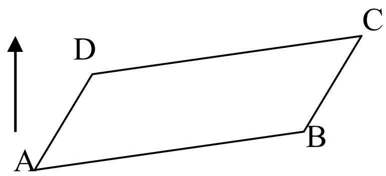
แบบฝึกหัดที่ 2

1. ให้เขียนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานจากรูปต้นแบบและทิศทางที่กำหนดให้

ก.



ข.



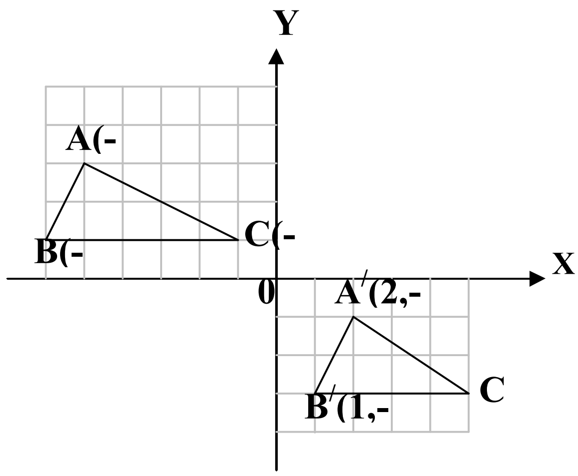
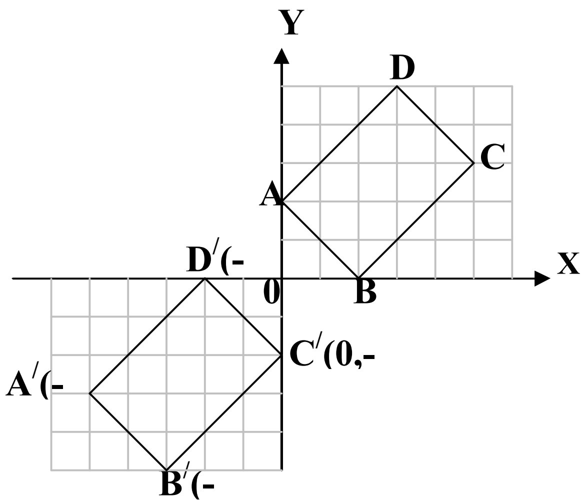
2. ให้เขียนภาพการเลื่อนขนานโดยกำหนดภาพต้นแบบ ทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนานเอง

ก.

ข.

แบบฝึกหัด (ต่อ)

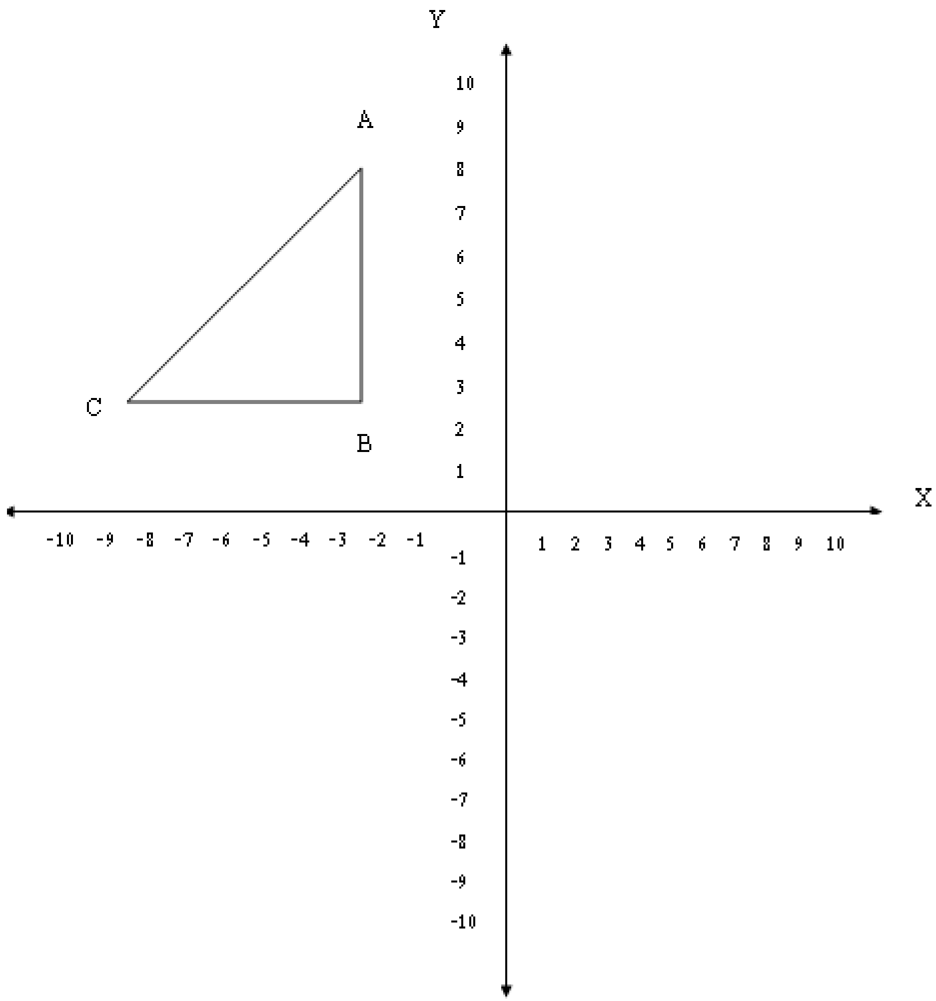
ข้อ 3

ภาพ	พิกัดของตำแหน่งที่กำหนดให้
	C′(____ , ____)
	A′(____ , ____) B′(____ , ____) C′(____ , ____)

แบบฝึกหัดที่ 3

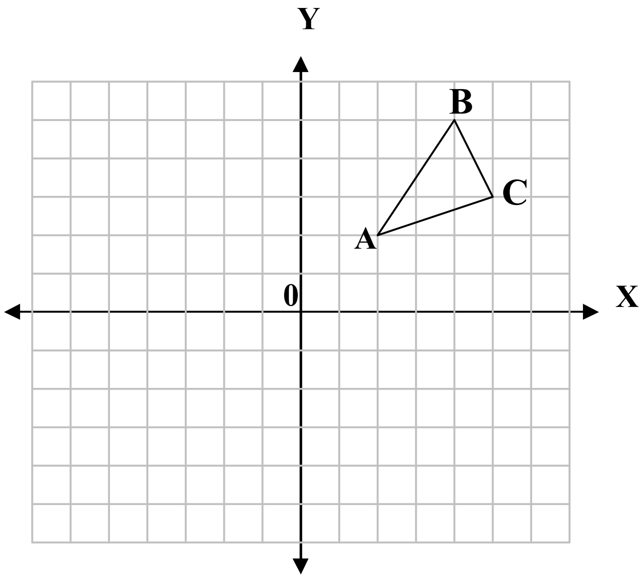
คำชี้แจง จงพิจารณารูปที่กำหนดให้แล้ว

- เขียนรูปสะท้อน
- เขียนเส้นสะท้อน
- บอกจุดพิกัดของจุดยอดของมุมของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการสะท้อน
- บอกจุดพิกัดบางจุดบนเส้นสะท้อนที่ได้



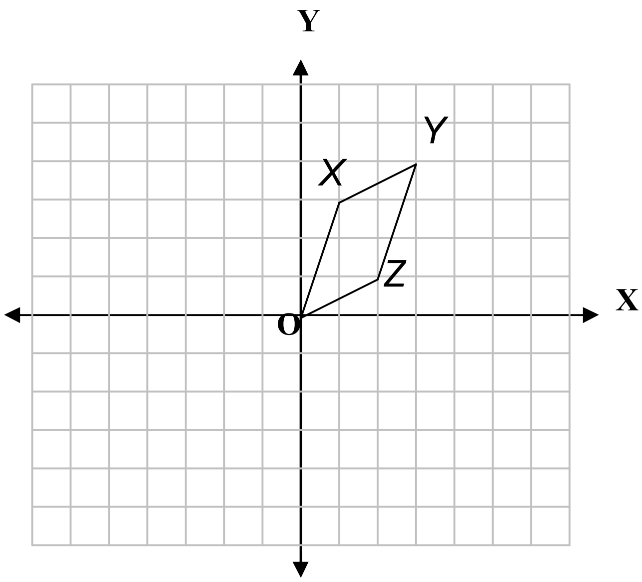
แบบฝึกหัดที่ 4

1.



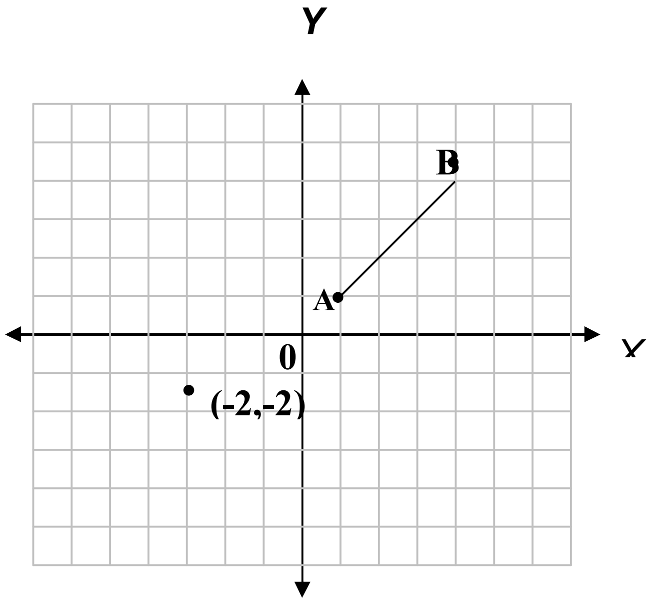
ให้เติมรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ที่เกิดจากการหมุนสามเหลี่ยม ABC เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด $(0 , 0)$ เป็นจุดหมุน

2.



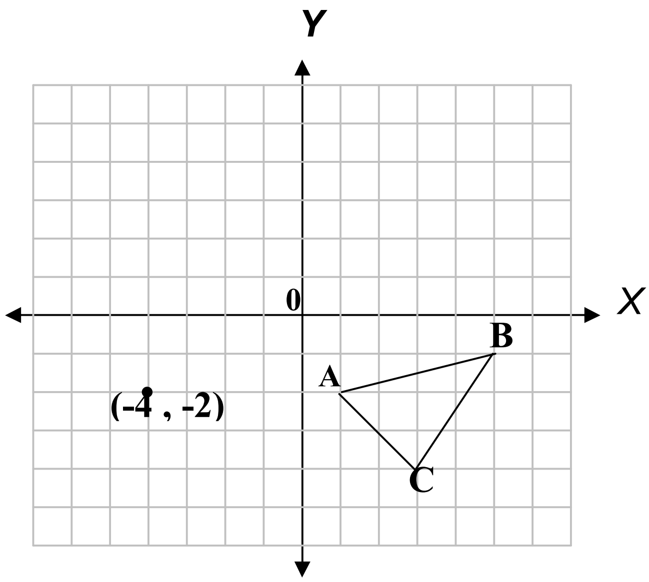
ให้เติมรูปสี่เหลี่ยม $O'X'Y'Z$ ที่เกิดจากการหมุนสี่เหลี่ยม OXYZ เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 270° และใช้จุด $(0 , 0)$ เป็นจุดหมุน

3.



ให้เติมส่วนของเส้นตรง $A'B'$ ที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรง AB เพียงอย่างเดียว โดยหมุนตามเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด (-2, -2) เป็นจุดหมุน

4.

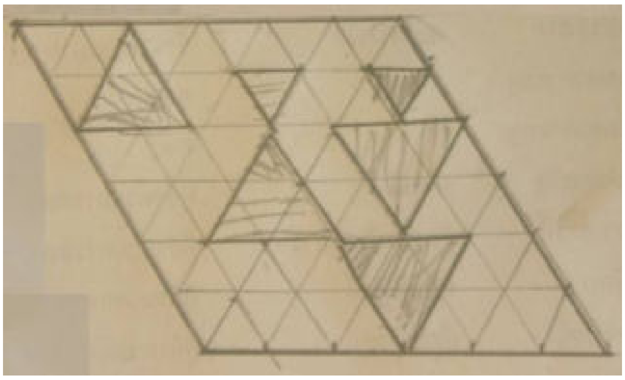


ให้เติมรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ที่เกิดจากการหมุนสามเหลี่ยม ABC เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด (-4 , -2) เป็นจุดหมุน

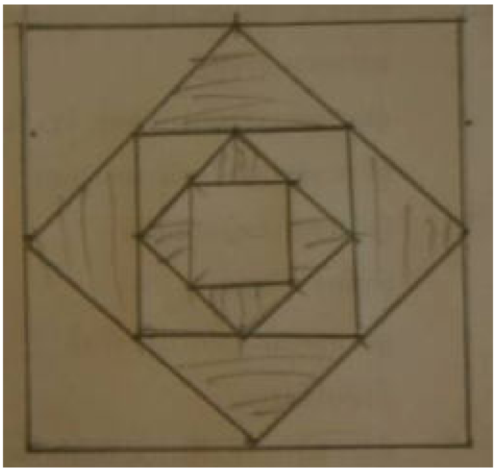
เรื่องที่ 3 การออกแบบเพื่อการสร้างสรรค์งานศิลปะโดยใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์และทางเรขาคณิต

ในชีวิตประจำวัน การออกแบบวัสดุ ครุภัณฑ์ต่าง ๆ เช่น ลายพิมพ์ผ้า จะเกี่ยวข้องกับรูปแบบทางเรขาคณิต ตัวอย่างเช่น

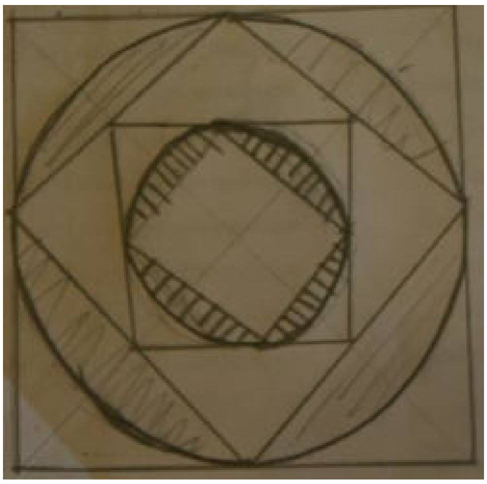
1. การใช้รูปสี่เหลี่ยม



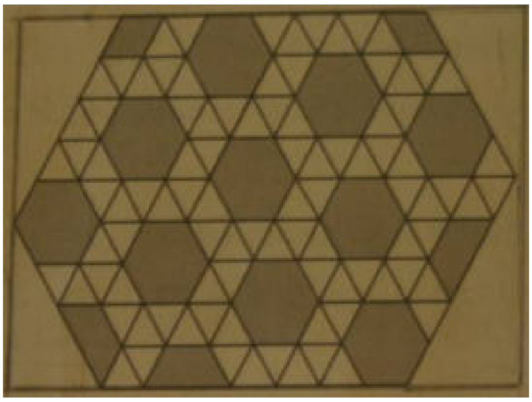
2. การใช้รูปสี่เหลี่ยมกับสามเหลี่ยม



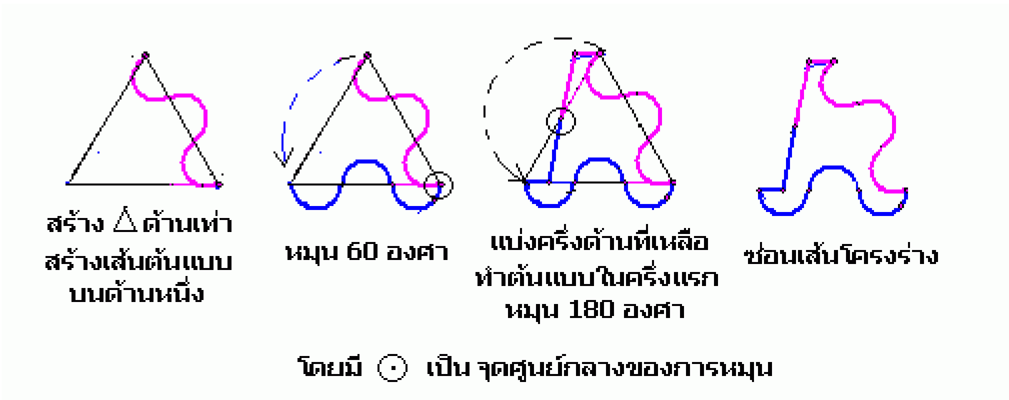
3. การใช้สี่เหลี่ยมกับวงกลม

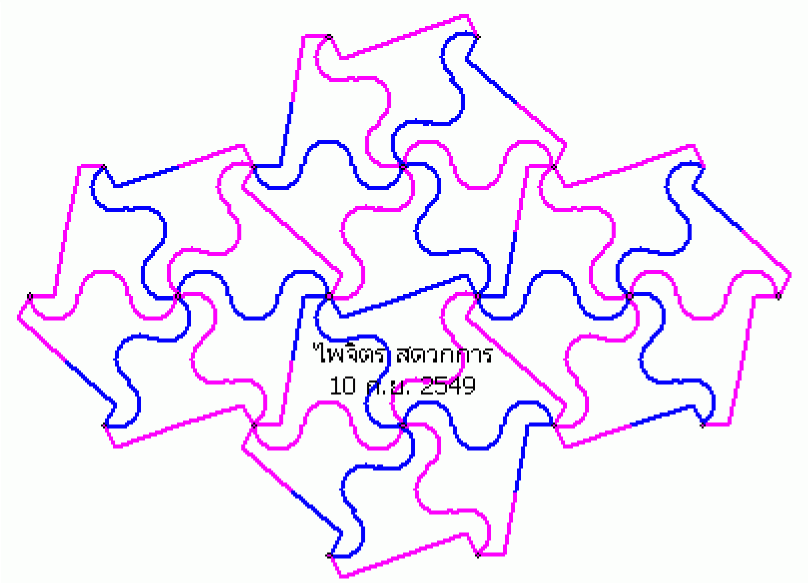


4. การใช้รูปสี่เหลี่ยม สามเหลี่ยม และหกเหลี่ยม



ตัวอย่าง กิจกรรมที่รวมคณิตศาสตร์กับศิลปะได้อย่างสวยงาม โดยใช้การแปลงทางเรขคณิต เช่น การหมุน การสะท้อน หรือการเลื่อนขนาน



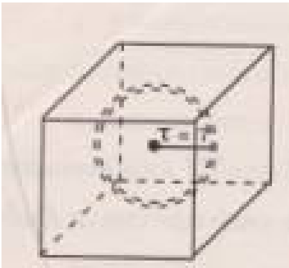


4. การออกแบบโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต

การออกแบบผลิตภัณฑ์และบรรจุภัณฑ์ของสินค้ามีความจำเป็นต้องให้มีรูปแบบที่สวยงาม มีความพอเหมาะกับผลิตภัณฑ์ เพื่อความประหยัด และการใช้ประโยชน์ให้เกิดสูงสุดดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ลูกบอลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เซนติเมตร จะบรรจุในกล่องทรงสี่เหลี่ยมได้พอดี เมื่อใช้กล่องมีความจุเท่าใดและใช้วัสดุทำกล่องที่มีพื้นผิวเท่าใด

วิธีทำ



ลูกบอลมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เซนติเมตร

กล่องทรงสี่เหลี่ยมต้องมีขนาด เป็นกล่องลูกบาศก์ ยาวด้านละ 14 เซนติเมตร

ปริมาตรของกล่องลูกบาศก์ = $(\text{ความยาวด้าน})^3$

= 14x14x14 ลูกบาศก์เซนติเมตร

= 2,744 ลูกบาศก์เซนติเมตร

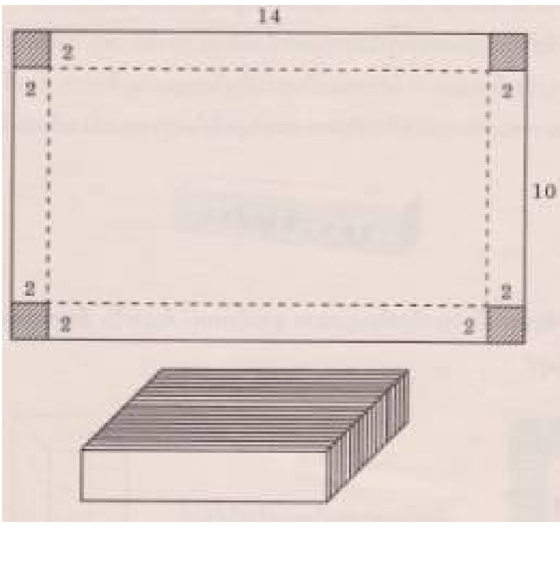
พื้นที่ผิวกล่องทรงลูกบาศก์ = 6 x พื้นที่ผิวของกล่องหนึ่งด้าน

= 6 x (14 x 14)

= 1,176 ตารางเซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 10 เซนติเมตร ยาว 14 เซนติเมตร ถ้าตัดมุมทั้งสี่ออก เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 เซนติเมตร จากนั้นพับตามรอยตัดให้เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม จงหาว่ารูปทรงนี้จะมีความจุเท่าไร

วิธีทำ



ฐานของกล่องพับได้กว้าง 10 – 2 – 2 = 6 เซนติเมตร

ฐานของกล่องมีความยาว 14 – 2 – 2 = 10 เซนติเมตร

มีความสูงของกล่อง 2 เซนติเมตร

ความจุของกล่อง = ความยาวด้านกว้าง x ความยาวด้านยาว x ส่วนสูง

= 6 x10 x 2

= 120 ลูกบาศก์เซนติเมตร

บทที่ 7
สถิติเบื้องต้น

สาระสำคัญ

1. ข้อมูลสถิติ หมายถึง ตัวเลขหรือข้อความที่แทนข้อเท็จจริงของลักษณะที่เราสนใจ
2. ระเบียบวิธีการทางสถิติ จะประกอบไปด้วย การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์และการตีความของข้อมูล
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล หมายถึง กระบวนการกระทำเพื่อจะให้ได้ข้อมูลที่ต้องการศึกษาภายใต้ขอบเขตที่กำหนด
4. การนำเสนอข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา จะมี 2 แบบ คือ การนำเสนออย่างเป็นแบบแผนและการนำเสนออย่างไม่เป็นแบบแผน
5. การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง เป็นการหาค่ากลางด้วยวิธีต่าง ๆ กัน เพื่อใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งชุด ค่ากลางที่นิยมใช้มี 3 วิธี ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น และสามารถนำผลการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นไปใช้ในการตัดสินใจได้
2. เลือกใช้ค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดและวัตถุประสงค์ที่ต้องการได้
3. นำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่างๆรวมทั้งการอ่านและตีความหมายจากการนำเสนอข้อมูลได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

เรื่องที่ 2 การหาค่ากลางของข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

เรื่องที่ 3 การนำเสนอข้อมูล

เรื่องที่ 1 การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

ความหมาย

คำว่า "สถิติ" เป็นเรื่องที่มีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งต่อการตัดสินใจหรือวางแผน ซึ่งแต่เดิมเข้าใจว่า สถิติ หมายถึง ข้อมูลหรือข่าวสารที่เป็นประโยชน์ต่อการบริหารงานของภาครัฐ เช่น การจัดเก็บภาษี การสำรวจผลผลิต ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับประชากร จึงมีรากศัพท์มาจากคำว่า "State" แต่ปัจจุบันสถิติ มีความหมายอยู่ 2 ประการ คือ

1. ตัวเลขที่แทนข้อเท็จจริงที่มีการแปรเปลี่ยนไปตามปริมาณสิ่งของที่วัดเป็นค่าออกมา เช่น สถิติเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนในโรงเรียน จำนวนนักเรียนที่มาและขาดการเรียนในรอบเดือน ปริมาณน้ำฝนในรอบปี จำนวนอุบัติเหตุการเดินทางในช่วงปีใหม่และสงกรานต์ เป็นต้น

2. สถิติในความหมายของวิชาหรือศาสตร์ที่ตรงกับภาษาอังกฤษว่า "Statistics" หมายถึง กระบวนการจัดกระทำของข้อมูลตั้งแต่การเก็บรวบรวมข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล การนำเสนอข้อมูล และการตีความหรือแปลความหมายข้อมูล เป็นต้น

การศึกษาวิชาสถิติจะช่วยให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีสถิติที่เป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ตั้งแต่การวางแผน การเลือกใช้ และการปฏิบัติในการดำเนินงานต่าง ๆ รวมทั้งการแก้ปัญหาในเรื่องต่าง ๆ ทั้งในวงการศึกษาวิทยาศาสตร์ การเกษตร การแพทย์ การทหาร ธุรกิจต่าง ๆ เป็นต้น กิจการต่าง ๆ ต้องอาศัยข้อมูลสถิติและระเบียบสถิติต่าง ๆ มาช่วยจัดการ ทั้งนี้เนื่องจากการตัดสินใจหรือการวางแผน และการแก้ปัญหาอย่างมีหลักเกณฑ์จะทำให้โอกาสที่จะตัดสินใจเกิดความผิดพลาดน้อยที่สุดได้

นอกจากนี้หลักวิชาทางสถิติยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการจัดเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อความจำเป็นที่ต้องนำไปใช้งานในด้านต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งทำให้ทราบข้อมูล และทำความเข้าใจกับข่าวสารและรายงานข้อมูลทางวิชาการต่าง ๆ ที่นำเสนอในรูปแบบของตาราง แผนภูมิ แผนภาพ กราฟ ซึ่งผู้อ่านหากมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องของสถิติเบื้องต้นแล้ว จะทำให้ผู้อ่านสามารถรู้และเข้าใจในข้อมูลและข่าวสารได้เป็นอย่างดี

1.1 ชนิดของข้อมูล อาจแบ่งได้เป็นดังนี้

1. ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative data) เป็นข้อมูลที่แสดงถึง คุณสมบัติ สภาพ สถานะ หรือความคิดเห็น เช่น ความสวย ระดับการศึกษา เพศ อาชีพ เป็นต้น

2. ข้อมูลเชิงปริมาณ (Qualitative data) เป็นข้อมูลที่เป็นตัวเลข เช่น ข้อมูลที่เกิดจากการชั่ง ตวง หรือ ค่าของข้อมูลที่นำปริมาณมาเปรียบเทียบกันได้ เช่น ความยาว น้ำหนัก ส่วนสูง สถิติของคนงานแยกตามเงินเดือน เป็นต้น

นอกจากนี้ยังมีข้อมูลซึ่งสามารถแยกตามกาลเวลาและสภาพภูมิศาสตร์อีกด้วย

แหล่งที่มาของข้อมูล โดยปกติข้อมูลที่ได้มาจะมาจากแหล่งต่าง ๆ อยู่ 2 ประเภท คือ

- ข้อมูลปฐมภูมิ (Primary data) หมายถึง ข้อมูลที่รวบรวมมาจากผู้ให้หรือแหล่งที่เป็นข้อมูลโดยตรง เช่น การสำรวจนับจำนวนพนักงานในบริษัทแห่งหนึ่ง
- ข้อมูลทุติยภูมิ (Secondary data) หมายถึง ข้อมูลที่รวบรวมหรือเก็บมาจากแหล่งข้อมูลที่มีการรวบรวมไว้แล้ว เช่น การคัดลอกจำนวนสินค้าส่งออกที่การท่าเรือได้รวบรวมไว้

1.2 การเก็บรวบรวมข้อมูล

การเก็บรวบรวมข้อมูลในทางสถิติจะมีวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลได้ 3 วิธี ตามลักษณะของการปฏิบัติ กล่าวคือ

1) วิธีการเก็บข้อมูลจากการสำรวจ การเก็บรวบรวมข้อมูลวิธีนี้เป็นที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยสามารถทำได้ตั้งแต่การสำมะโน การสอบถาม / สัมภาษณ์จากแหล่งข้อมูลโดยตรง รวมทั้งการเก็บรวบรวมข้อมูลที่เกิดเหตุจริง ๆ เช่น การเข้าไปสำรวจผู้มีงานทำในตำบล หมู่บ้าน การแจงนับนักท่องเที่ยวที่เข้ามาในจังหวัด หรืออำเภอ การสอบถามข้อมูลคนไข้ที่นอนอยู่ในโรงพยาบาล เป็นต้น วิธีการสำรวจนี้สามารถกระทำได้หลายกรณี เช่น

1.1 การสอบถาม วิธีที่นิยม คือ การส่งแบบสำรวจหรือแบบข้อคำถามที่เหมาะสม เข้าใจง่ายให้ผู้อ่านตอบ ผู้ตอบมีอิสระในการตอบ แล้วกรอกข้อมูลส่งคืน วิธีการสอบถามอาจใช้สื่อทางไปรษณีย์ ทางโทรศัพท์ เป็นต้น วิธีนี้ประหยัดค่าใช้จ่าย

1.2 การสัมภาษณ์ เป็นวิธีการรวบรวมข้อมูลที่ได้คำตอบทันที ครบถ้วน เชื่อถือได้ดี แต่อาจเสียเวลาและค่าใช้จ่ายค่อนข้างสูง การสัมภาษณ์ทำได้ทั้งเป็นรายบุคคลและเป็นกลุ่ม

2) วิธีการเก็บข้อมูลจากการสังเกต เป็นวิธีการรวบรวมข้อมูลโดยการบันทึกสิ่งที่พบเห็นจริงในขณะนั้น ข้อมูลจะเชื่อถือได้มากน้อยอยู่ที่ผู้รวบรวมข้อมูล สามารถกระทำได้เป็นช่วง ๆ และเวลาที่ต่อเนื่องกันได้ วิธีนี้ใช้ควบคู่ไปกับวิธีอื่นๆ ได้ด้วย

3) วิธีการเก็บข้อมูลจากการทดลอง เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลที่มีการทดลองหรือปฏิบัติอยู่จริงในขณะนั้นข้อดีที่ทำให้เราทราบข้อมูล ขั้นตอน เหตุการณ์ที่ต่อเนื่องที่ถูกต้องเชื่อถือได้ บางครั้งต้องใช้เวลาเก็บข้อมูลที่นานมาก ทั้งนี้ต้องอาศัยความชำนาญของผู้ทดลอง หรือผู้ถูกทดลองด้วย จึงจะทำให้ได้ข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

อนึ่ง การเก็บรวบรวมข้อมูล ถ้าเราเลือกมาจากจำนวนหรือรายการของข้อมูลที่ต้องการเก็บมาทั้งหมดทุกหน่วยจะเรียกว่า “ประชากร” (Population) แต่ถ้าเราเลือกมาเป็นบางหน่วยและเป็นตัวแทนของประชากรนั้น ๆ เราจะเรียกว่า กลุ่มตัวอย่างหรือ “ ตัวอย่าง” (Sample)

1.3 การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล เป็นการแยกข้อมูลสถิติที่ได้มาเป็นตัวเลขหรือข้อความจากการรวบรวมข้อมูลให้เป็นระเบียบพร้อมที่จะนำไปใช้ประโยชน์ตามความต้องการ ทั้งนี้รวมถึงการคำนวณหรือหาค่าสถิติในรูปแบบต่าง ๆ ด้วย มีวิธีการดำเนินงานดังนี้

1.3.1 การแจกแจงความถี่ (Frequency distribution) เป็นวิธีการจัดข้อมูลของสถิติที่มีอยู่ หรือเก็บรวบรวมมาจัดเป็นกลุ่มเป็นพวก เพื่อความสะดวกในการที่นำมาวิเคราะห์ เช่น การวิเคราะห์ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวนของข้อมูล เป็นต้น การแจกแจงความถี่จะกระทำก็ต่อเมื่อมีความประสงค์จะวิเคราะห์ข้อมูลที่มีจำนวนมาก ๆ หรือข้อมูลที่ซ้ำ ๆ กัน เพื่อช่วยในการประหยัดเวลา และให้การสรุปผลของข้อมูลมีความรัดกุมสะดวกต่อการนำไปใช้และอ้างอิง รวมทั้งการนำไปใช้ประโยชน์ในด้านอื่น ๆ ต่อไปด้วย

ส่วนคำว่า “ตัวแปร” (Variable) ในทางสถิติ หมายถึง ลักษณะบางสิ่งบางอย่างที่เราสนใจจะศึกษาโดยลักษณะเหล่านั้นสามารถเปลี่ยนค่าได้ ไม่ว่าสิ่งนั้นจะเป็นข้อมูลเชิงปริมาณหรือคุณภาพ เช่น อายุของนักศึกษาการศึกษาทางไกลที่วัดออกมาเป็นตัวเลขที่แตกต่างกัน หากเป็นเพศมีทั้งเพศชายและหญิง เป็นต้น

การแจกแจงความถี่แบ่งออกเป็น 4 แบบคือ

1. การแจกแจงความถี่ทั่วไป
2. การแจกแจงความถี่สะสม
3. การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์
4. การแจกแจงความถี่สะสมสัมพัทธ์

1. การแจกแจงความถี่ทั่วไป จัดแบบเป็นตารางได้ 2 ลักษณะ

1) ตารางการแจกแจงความถี่แบบไม่จัดเป็นกลุ่ม เป็นการนำข้อมูลมาเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก หรือมากไปหาน้อย แล้วดูว่าจำนวนในแต่ละตัวมีตัวซ้ำอยู่กี่จำนวน วิธีนี้ข้อมูลแต่ละช่วงชั้นจะเท่ากันโดยตลอด และเหมาะกับการแจกแจงข้อมูลที่ไม่มากนัก

ตัวอย่างที่ 1 คะแนนการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักศึกษา 25 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน มีดังนี้

12	9	10	14	6
13	11	7	9	10
7	5	8	6	11
4	10	2	12	8
10	15	9	4	7

เมื่อนำข้อมูลมานับซ้ำ โดยทำเป็นตารางมีรอยขีดเป็นความถี่ ได้ดังนี้

คะแนน	รอยขีด	ความถี่
1	-	0
2	/	1
3	-	0
4	//	2
5	/	1
6	//	2
7	///	3
8	//	2
9	///	3
10	////	4
11	//	2
12	//	2
13	/	1
14	/	1
15	/	1
	รวม	**25**

หรืออาจนำเสนอเป็นตารางเฉพาะคะแนนและความถี่ได้อีก ดังนี้

คะแนน (x)	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	รวม
ความถี่ (f)	0 1 0 2 1 2 3 2 3 4 2 2 1 1 1	25

2) การแจกแจงความถี่แบบจัดเป็นกลุ่ม การแจกแจงความถี่แบบจัดเป็นกลุ่มนี้เรียกว่าจัดเป็นอันตรภาคชั้น เป็นการนำข้อมูลมาจัดลำดับจากมากไปหาน้อย หรือน้อยไปหามากเช่นกัน โดยข้อมูลแต่ละชั้นจะมีช่วงชั้นที่เท่ากัน การแจกแจงแบบนี้เหมาะสำหรับจัดกระทำกับข้อมูลที่มีจำนวนมาก

ตัวอย่างที่ 2 อายุของประชากรในหมู่บ้านหนึ่งจำนวน 45 คน เป็นดังนี้

41	53	61	42	15	39	65	40	64	22
71	62	50	81	43	60	16	63	31	52
47	48	90	73	83	78	56	50	80	45
37	51	49	55	78	60	90	31	44	22
54	36	22	66	46					

เมื่อนำข้อมูลมาทำเป็นตารางแจกแจงความถี่แบบจัดเป็นกลุ่ม ได้ดังนี้

อายุ (ปี)	รอยขีด*	ความถี่
90-100	/	1
81-90	///	3
71-80	////	4
61-70	~~////~~ /	6
51-60	~~////~~ ///	8
41-50	~~////~~ ~~////~~ /	11
31-40	~~////~~ //	7
21-30	///	3
11-20	//	2
0-10	-	0
	รวม	45

1. การแจกแจงความถี่ที่เป็นอันตรภาคชั้น มีคำเรียกความหมายของคำต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1.1 อันตรภาคชั้น (Class interval) หมายถึง ข้อมูลที่แบ่งออกเป็นช่วง ๆ เช่น อันตรภาคชั้น 11-20 , 21 -30 ,61–70 ,81-90 เป็นต้น

1.2. ขนาดของอันตรภาคชั้น หมายถึง ความกว้าง 1 ช่วงของข้อมูลในแต่ละชั้น จาก 11-20 หรือ 61-70 จะมีค่าเท่ากับ 10

1.3 จำนวนของอันตรภาคชั้น หมายถึง จำนวนช่วงชั้นทั้งหมดที่ได้แจกแจงไว้ในที่นี้ มี 10 ชั้น

1.4 ความถี่ (Frequency) หมายถึง รอยขีดที่ซ้ำกัน หรือจำนวนข้อมูลที่ซ้ำกันในอันตรภาคชั้นนั้น ๆ เช่น อันตรภาคชั้น 41-50 มีความถี่เท่ากับ 11 หรือมีผู้ที่มีอายุในช่วง 41-50 มีอยู่ 11 คน

1.4 การแจกแจงความถี่สะสม

ความถี่สะสม (Commulative frequency) หมายถึง ความถี่สะสมของอันตรภาคใด ที่เกิดจากผลรวมของความถี่ของอันตภาคนั้น ๆ กับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนต่ำกว่าทั้งหมด (หรือสูงกว่าทั้งหมด)

ตัวอย่างที่ 3 ข้อมูลส่วนสูง (เซนติเมตร) ของพนักงานคนงานโรงงานแห่งหนึ่ง จำนวน 40 คนมีดังนี้

142	145	160	174	146	154	152	157	185	158
164	148	154	166	154	175	144	138	174	168
152	160	141	148	152	145	148	154	178	156

166 164 130 158 162 159 180 136 135 172

เมื่อนำมาแจกแจงความถี่ได้ดังนี้

(ส่วนสูง) อันตรภาคชั้น	รอยขีด	ความถี่	ความถี่สะสม	(วิธีคิด)
180-189	//	2	40	(38+2) = 40
170-179	卌	5	38	(33+5) = 38
160-169	卌 ///	8	33	(25+8) = 33
150-159	卌 卌 //	12	25	(13+12) = 25
140-149	卌 ////	9	13	(4+9) = 13
130-139	////	4	4	4

หมายเหตุ ความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นสุดท้ายจะเท่ากับผลรวมของความถี่ทั้งหมดและสิ่งที่ควรทราบต่อไปได้แก่ ขีดจำกัดล่าง ขีดจำกัดบนและจุดกึ่งกลางชั้น

1.5 การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์

ความถี่สัมพัทธ์ (Relative frequency) หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้นกับผลรวมของความถี่ทั้งหมด ซึ่งสามารถแสดงในรูปจุดทศนิยม หรือร้อยละก็ได้

ตัวอย่างที่ 4 การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ของส่วนสูงนักศึกษา

ส่วนสูง	ความถี่	ความถี่สัมพัทธ์	ร้อยละของความถี่สัมพัทธ์
180-189	2	$\frac{2}{40}$ = .05	5
170-179	5	$\frac{5}{40}$ = .125	12.5
160-169	8	$\frac{8}{40}$ = .20	20
150-159	12	$\frac{12}{40}$ = .30	30
140-149	9	$\frac{9}{40}$ = .225	22.5
130-139	4	$\frac{4}{40}$ = .10	10
รวม	40	1	100

หมายเหตุ ผลรวมของความถี่สัมพัทธ์ต้องเท่ากับ 1 และค่าร้อยละความถี่สัมพัทธ์ต้องเท่ากับ 100 ด้วย

1.6 การแจกแจงความถี่สะสมสัมพัทธ์

ความถี่สะสมสัมพัทธ์ (Relative commulative frequency) ของอันตภาคใด คือ อัตราส่วนระหว่างความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นนั้นกับผลรวมของความถี่ทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 5 การแจกแจงความถี่สะสมสัมพัทธ์ของส่วนสูงนักศึกษา

ส่วนสูง	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์	ร้อยละของความถี่สัมพัทธ์
180-189	2	40	$\frac{40}{40} = 1.00$	100
170-179	5	38	$\frac{38}{40} = 0.95$	95
160-169	8	33	$\frac{33}{40} = 0.825$	82.5
150-159	12	25	$\frac{25}{40} = 0.625$	52.5
140-149	9	13	$\frac{13}{40} = 0.325$	32.5
130-139	4	4	$\frac{4}{40} = .1$	1
รวม	40			

1.7 ขีดจำกัดชั้น (Class limit)

หมายถึง ตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในอันตรภาคชั้น แบ่งเป็นขีดจำกัดบน และขีดจำกัดล่าง (ดูตารางในตัวอย่างที่ 5 ประกอบ)

1.1 ขีดจำกัดบนหรือขอบบน (Upper boundary) คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างคะแนนที่มากที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้นกับคะแนนน้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันในช่วงคะแนนที่สูงกว่า เช่น อันตรภาคชั้น 140 -149

$$\text{ขอบบน} = \frac{149+150}{2} = 149.5$$

นั่นคือ ขีดจำกัดบนของอันตรภาคขั้น 140 – 149 คือ 149.5

1.2 ขีดจำกัดล่างหรือขอบล่าง (Lower boundary) คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างคะแนนที่น้อยที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้นกับคะแนนที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่อยู่ติดกันในช่วงคะแนนที่ต่ำกว่า เช่น ตัวอย่างอันตรภาคชั้น 140 – 149

$$\text{ขอบล่าง} = \frac{140+139}{2} = 139.5$$

นั่นคือ ขีดจำกัดล่างของอันตภาคขั้น 140 – 149 คือ 139.5

ตัวอย่างที่ 6 การแจกแจงความถี่ของส่วนสูงนักศึกษา

ความสูง (ซม.)	ความถี่	ความถี่สะสม	ขีดจำกัดล่าง	ขีดจำกัดบน	จุดกึ่งกลางชั้น
180 – 189	2	40	179.5	189.5	184.5
170 – 179	5	38	169.5	149.5 *	174.5
160 – 169	8	33	159.5	169.5	164.5
150 – 159	12	25	149.5	159.5 **	154.5
140 – 149	9	13	139.5	149.5 *	144.5
130 – 139	4	4	129.5	139.5	134.5
รวม	40				

1.8 จุดกึ่งกลางชั้น (Mid point)

เป็นค่าหรือคะแนนที่อยู่ระหว่างกลางของอันตรภาคชั้นนั้น ๆ เช่น อันตรภาคชั้น 150 -159 จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นดังกล่าว $\frac{150+159}{2} = 154.5$ เป็นต้น

นอกจากนี้ยังสามารถแสดงการแจกแจงความถี่ของข้อมูลโดยใช้ฮิสโทแกรม (Histogram) รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ (Frequency polygon) เส้นโค้งของความถี่ (Frequency curve)

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนข้อมูลสถิติที่เกี่ยวข้องกับบุคคลในครอบครัว เช่น เพศ อายุ สถานภาพ อาชีพ
2. จงยกตัวอย่างข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณมาอย่างละ 5 ชนิด
3. จงพิจารณาว่าข้อมูลต่อไปนี้เป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ หรือข้อมูลเชิงปริมาณ

- พนักงานในรงงานแห่งหนึ่งถูกสอบถามถึงสุขภาพร่างกายในขณะปฏิบัติงาน

☐ คุณภาพ ☐ ปริมาณ

เพราะว่า...

- นักศึกษาจำนวนหนึ่งที่ถูกสอบถามถึงค่าใช้จ่ายในการไปพบกลุ่มที่ห้องสมุด

☐ คุณภาพ ☐ ปริมาณ

เพราะว่า...

4. ข้อมูลปฐมภูมิต่างจากข้อมูลทุติยภูมิอย่างไร จงอธิบายและยกตัวอย่าง
5. ข้อมูลต่อไปนี้ควรใช้วิธีใดในการรวบรวม (ตอบได้หลายคำตอบ)
   5.1 การใช้เวลาว่างของนักศึกษา
   5.2 รายได้ของคนงานในสถานประกอบการ
   5.3 น้ำหนักของเด็กอายุ 3-6 ปี ในหมู่บ้าน
   5.4 ผลของการใช้สื่อการเรียนการสอน 2 ชนิดที่แตกต่าง
   5.5 การระบาดของโรคที่เป็นอันตรายต่อมนุษย์
6. จงบอกข้อดีข้อเสียของการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยวิธีการสัมภาษณ์
7. ข้อมูลการสำรวจอายุ (ปี) ของคนงานจำนวน 50 คนในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

27	35	21	49	24	29	22	37	32	49
33	28	30	24	26	45	38	22	40	46
20	31	18	27	25	42	21	30	25	27
26	50	31	19	53	22	28	36	24	23
21	29	37	32	38	31	36	28	27	41

กำหนดความกว้างของอันตรภาคชั้นเป็น 8

1. จงสร้างตารางแจกแจงความถี่
2. จงหาขีดจำกัดชั้นที่แท้จริงและจุดกึ่งกลางชั้น
3. จงหาความถี่สะสม ความถี่สัมพัทธ์ และความถี่สะสมสัมพัทธ์
4. จงหาพิสัยของข้อมูลชุดนี้
5. จงหาจำนวนคนงานที่มีอายุต่ำกว่า 45 ปี

เรื่องที่ 2 การหาค่ากลางของข้อมูล โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

การหาค่ากลางของข้อมูลที่เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งหมดเพื่อความสะดวกในการสรุปเรื่องราวเกี่ยวกับข้อมูลนั้นๆ จะช่วยทำให้เกิดการวิเคราะห์ข้อมูลถูกต้องดีขึ้น การหาค่ากลางของข้อมูลมีวิธีหาหลายวิธี แต่ละวิธีมีข้อดีและข้อเสีย และมีความเหมาะสมในการนำไปใช้ไม่เหมือนกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะข้อมูลและวัตถุประสงค์ของผู้ใช้ข้อมูลนั้นๆ **ค่ากลางของข้อมูลที่สำคัญ** มี 3 ชนิด คือ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic mean)
2. มัธยฐาน (Median)
3. ฐานนิยม (Mode)

การหาค่ากลางของข้อมูลทำได้ทั้งข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่และข้อมูลที่แจกแจงความถี่

2.1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic mean)

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลได้จากการหารผลบวกของข้อมูลทั้งหมดด้วยจำนวนข้อมูล แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{x}$

<u>การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่</u>

ให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูล N ค่า

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

หรือ $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

ตัวอย่าง จากการสอบถามอายุของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้ 14 , 16 , 14 , 17 , 16 , 14 , 18 , 17

1) จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุนักเรียนกลุ่มนี้

2) เมื่อ 3 ปีที่แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุนักเรียนกลุ่มนี้เป็นเท่าใด

1) วิธีทำ

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{14+16+14+17+16+14+18+17}{8}$$

$$= 15.75$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนกลุ่มนี้ คือ 15.75 ปี

2) วิธีทำ

เมื่อ 3 ปีที่แล้ว 11 13 11 14 13 11 15 14

อายุปัจจุบัน 14 16 14 17 16 14 18 17

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{11+13+11+14+13+11+15+14}{8}$$

$$= \frac{102}{8}$$

$$= 12.75$$

เมื่อ 3 ปีที่แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุของนักเรียนกลุ่มนี้ คือ 12.75 ปี

- **การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่แจกแจงความถี่**

ถ้า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ เป็นความถี่ของค่าจากการสังเกต $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

ตัวอย่าง จากตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียน 40 คน ดังนี้ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

คะแนน	จำนวนนักเรียน (f)	x	fx
11 – 20	7	15.5	108.5
21 – 30	6	25.5	153
31 – 40	8	35.5	284
41 – 50	15	45.5	682.5
51 - 60	4	55.5	222
	$\sum f = N = 40$		$\sum fx = 1450$

วิธีทำ

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum x}$$
$$= \frac{1450}{40}$$
$$= 36.25$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 36.25

สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเลขคณิต

1. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$

2. $\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right) = 0$

3. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^2$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ M = $\bar{x}$ หรือ $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^2$
   เมื่อ M เป็นจำนวนจริงใดๆ

4. $x_{\min} \langle \bar{x} \langle x_{\min}$

5. ถ้า $y_i = ax_i + b$, I = 1, 2, 3, ……., N เมื่อ a , b เป็นค่าคงตัวใดๆแล้ว
   $\bar{y} = a\bar{x} + b$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม (Combined Mean)

ถ้า $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_k$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ 1 , 2 , … , k ตามลำดับ

ถ้า $N_1, N_2, \ldots, N_k$ เป็นจำนวนค่าจากการสังเกตในข้อมูลชุดที่ 1 , 2 ,… , k ตามลำดับ

$$\bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3 + \ldots + N_k\bar{x}_k}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k} = \frac{\sum N\bar{x}}{\sum N}$$

ตัวอย่าง ในการสอบวิชาสถิติของนักเรียนโรงเรียนปราณีวิทยา ปรากฏว่านักเรียนชั้น ม.6/1 จำนวน 40 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 70 คะแนน นักเรียนชั้น ม.6/2 จำนวน 35 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 68 คะแนน นักเรียนชั้น ม.6/3 จำนวน 38 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 72 คะแนน จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 3 ห้องรวมกัน

วิธีทำ $\bar{x}$ รวม $= \dfrac{\sum N\bar{x}}{\sum N}$

$$= \frac{(40)(70)+(35)(68)+(38)(72)}{40+35+38}$$

$$= 70.05$$

2.2. มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด เมื่อได้เรียงข้อมูลตามลำดับ ไม่ว่าจากน้อยไปมาก หรือจากมากไปน้อย แทนด้วยสัญลักษณ์ Md

การหามัธยฐานของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

หลักการคิด

1) เรียงข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดจากน้อยไปมาก หรือมากไปน้อยก็ได้

2) ตำแหน่งมัธยฐาน คือ ตำแหน่งกึ่งกลางข้อมูลทั้งหมด ดังนั้นตำแหน่งของมัธยฐาน = $\dfrac{N+1}{2}$

เมื่อ N คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

3) มัธยฐาน คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด

ตัวอย่าง กำหนดให้ค่าจากการสังเกตในข้อมูลชุดหนึ่ง มีดังนี้

5, 9, 16, 15, 2, 6, 1, 4, 3, 4, 12, 20, 14, 10, 9, 8, 6, 4, 5, 13 จงหามัธยฐาน

วิธีทำ เรียงลำดับข้อมูล 1 , 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 5 , 6 , 6 , 8 , 9 , 9 , 10 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 20

ตำแหน่งมัธยฐาน $= \dfrac{N+1}{2}$

$$= \frac{20+1}{2}$$

$$= 10.5$$

ค่ามัธยฐานอยู่ระหว่างตำแหน่งที่ 10 และ 11

ค่าของข้อมูลตำแหน่งที่ 10 คือ 6 และตำแหน่งที่ 11 คือ 8

ดังนั้น ค่ามัธยฐาน $= \frac{6+8}{2} = 7$

<u>การหามัธยฐานของข้อมูลที่จัดเป็นอันตรภาคชั้น</u>

ขั้นตอนในการหามัธยฐานมีดังนี้

(1) สร้างตารางความถี่สะสม

(2) หาตำแหน่งของมัธยฐาน คือ $\frac{N}{2}$ เมื่อ N เป็นจำนวนของข้อมูลทั้งหมด

(3) ถ้า $\frac{N}{2}$ เท่ากับความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นใด อันตรภาคชั้นนั้นเป็นชั้น มัธยฐาน และมีมัธยฐานเท่ากับขอบบน ของอันตรภาคชั้นนั้น ถ้า $\frac{N}{2}$ ไม่เท่าความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นใดเลย อันตรภาคชั้นแรกที่มีความถี่สะสมมากกว่า $\frac{N}{2}$ เป็นชั้นของมัธยฐาน และหามัธยฐานได้จากการเทียบบัญญัติไตรยางค์ หรือใช้สูตรดังนี้ จากข้อมูลทั้งหมด N จำนวน ตำแหน่งของมัธยฐานอยู่ที่ $\frac{N}{2}$

$$\text{Md} = Lo + i\left\{\frac{\frac{N}{2} - \sum f_l}{f_m}\right\}$$

เมื่อ Lo คือ ขีดจำกัดล่างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$\sum f_l$ คือ ความถี่สะสมก่อนถึงชั้นที่มีมัธยฐานอยู่ของคะแนนต่ำกว่าที่อยู่ชั้นติดกัน

f_m คือ ความถี่ของชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

i คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

N คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1 จงหามัธยฐานของคะแนนการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ดังตาราง

คะแนนของวิชาคณิตศาสตร์	ความถี่	ความถี่สะสม
90-99	2	60
80-89	8	58
70-79	21 (fm)	50*
60-69	20	29 (Σf_L)
50-59	6	9
40-49	2	3
30-39	1	1
	60	

Lo = 69.5

*เมื่อ $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ (อยู่ชั้นที่ 70-79)

อันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่คือ 70-79

จากสูตร $Md = Lo + i\left\{\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_m}\right\}^*$

เมื่อ $N = 60$, $i = 10$, $Lo = 69.5$, $\Sigma f_L = 29$, $fm = 21$

ดังนั้น $Md = 69.5 + 10\left\{\frac{\frac{60}{2} - 29}{21}\right\}$

มัธยฐาน = ...คะแนน

2.3 ฐานนิยม (Mode)

การหาฐานนิยมของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

ใช้สัญลักษณ์ Mo คือค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด หรือค่าที่มีจำนวนซ้ำ ๆ กันมากที่สุด แทนด้วยสัญลักษณ์ Mo

หลักการคิด

- ให้ดูว่าข้อมูลใดในข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมด มีการซ้ำกันมากที่สุด (ความถี่สูงสุด) ข้อมูลนั้นเป็นฐานนิยมของข้อมูลชุดนั้น

หมายเหตุ

- ฐานนิยมอาจจะไม่มี หรือ มีมากกว่า 1 ค่าก็ได้

สิ่งที่ต้องรู้

1. ถ้าข้อมูลแต่ละค่าที่แตกต่างกัน มีความถี่เท่ากันหมด เช่น ข้อมูลที่ประกอบด้วย 2 , 7 , 9 , 11 , 13 จะพบว่า แต่ละค่าของข้อมูลที่แตกต่างกัน จะมีความถี่เท่ากับ 1 เหมือนกันหมด ในที่นี้แสดงว่าไม่นิยมค่าของข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งเป็นพิเศษ ดังนั้น เราถือว่า ข้อมูลในลักษณะดังกล่าวนี้ ไม่มีฐานนิยม

2. ถ้าข้อมูลแต่ละค่าที่แตกต่างกัน มีความถี่สูงสุดเท่ากัน 2 ค่า เช่น ข้อมูลที่ประกอบด้วย 2, 4, 4, 7, 7, 9, 8, 5 จะพบว่า 4 และ 7 เป็นข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดเท่ากับ 2 เท่ากัน ในลักษณะเช่นนี้ เราถือว่า ข้อมูลดังกล่าวมีฐานนิยม 2 ค่า คือ 4 และ 7

3. จากข้อ 1, 2, และตัวอย่าง แสดงว่า ฐานนิยมของข้อมูล อาจจะมีหรือไม่มีก็ได้ถ้ามีอาจจะมีมากกว่า 1 ค่าก็ได้

การหาฐานนิยมของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

กรณีข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่แล้ว

การหาฐานนิยมจากข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว อาจนำค่าของจุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้นของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุดมาหาจุดกึ่งกลางชั้นที่หาค่าได้ จะเป็นฐานนิยมทันที แต่ค่าที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น หากให้ได้ข้อมูลที่เป็นจริงมากที่สุดต้องใช้วิธีการคำนวณจากสูตร

$$Mo = Lo + i\left\{\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right\}$$

เมื่อ Mo = ฐานนิยม

Lo = ขีดจำกัดล่างจริงของคะแนนที่มีฐานนิยมอยู่

d_1 = ผลต่างของความถี่ระหว่างอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่าที่อยู่ติดกัน

d_2 = ผลต่างของความถี่ระหว่างอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนสูงกว่าที่อยู่ติดกัน

i = ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มีฐานนิยมอยู่

ตัวอย่าง จากตารางคะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ของนักศึกษา 120 คน จงหาค่าฐานนิยม

คะแนน	จำนวนนักเรียน (f)	
90-99	8	
80-89	30	→ d_2
70-79	45	→ ชั้นฐานนิยม
60-69	22	→ d_1
80-59	10	
40-49	4	
30-39	1	
	120	

จากสูตร $Mo = Lo + i\left\{\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right\}$

Lo = 69.5 , d_1 = 45 – 22 = 23 , d_2 = 45 – 30 = 15 และ i = 79.5 – 69.5 = 10

จะได้ $Mo = 69.5 + 10\left\{\dfrac{23}{23 + 15}\right\} = 75.55$

ฐานนิยมของคะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ มีค่าเป็น 75.55

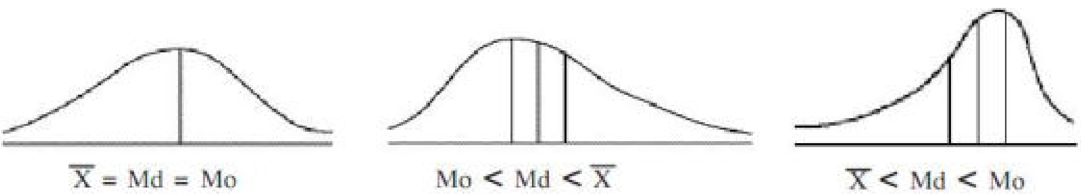
ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

นักสถิติพยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างค่ากลางทั้งสาม

ฐานนิยม = ตัวกลางเลขคณิต – 3 (ตัวกลางเลขคณิต – มัธยฐาน) หรือ

Mo = $\bar{x} - 3(\bar{x} - Md)$

ถ้าแสดงด้วยเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ค่ากลาง และการกระจายของข้อมูล ได้ดังนี้



ข้อมูลมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ขวา ข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ซ้าย

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของน้ำหนักเด็ก 20 คน ซึ่งมีน้ำหนักเป็นกิโลกรัมดังนี้

32	60	54	48	60	52	46	35	60	38
44	48	49	54	47	48	44	48	60	32

2. รายได้พิเศษต่อเดือนของพนักงานในโรงงานแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

รายได้ (บาท)	**ความถี่ (f)**
140 – 144	1
145 – 149	2
150 – 154	34
155 – 159	25
160 – 164	10
165 - 169	5
170 – 174	3

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม

เรื่องที่ 3 การนำเสนอข้อมูลสถิติ

การนำเสนอข้อมูลสถิติสามารถกระทำได้ 2 ลักษณะใหญ่ ๆ ดังนี้

3.1. การนำเสนออย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal presentation) เป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่จำเป็นต้องมีกฎเกณฑ์อะไรมากนัก มีการนำเสนอในลักษณะนี้อยู่ 2 วิธี คือ การนำเสนอในรูปข้อความหรือบทความและการนำเสนอในรูปข้อความกึ่งตาราง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง การนำเสนอในรูปข้อความ / บทความ

จากการสำรวจการใช้โทรศัพท์ผ่านดาวเทียมไทยคมทั่วประเทศในปี 2546 พบว่า มีอยู่ตามห้องสมุดประชาชนจำนวน 960 แห่ง มีอยู่ตามบ้านผู้เรียนจำนวน 540 แห่ง และมีอยู่ที่ศูนย์การเรียนชุมชนอีก 1,500 แห่ง รวมทั้งสิ้นมีโทรศัพท์ผ่านดาวเทียมทั้งหมด 3,020 แห่ง

ตัวอย่าง การนำเสนอในรูปข้อความกึ่งตาราง

จากการสำรวจสำมะโนประชากรที่ว่างงานตลอดทั่วประเทศในปี 2543 ปรากฏว่ามีผู้ว่างงานดังนี้

ภาคกลาง	65,364	คน
ภาคเหนือ	32,413	คน
ภาคใต้	23,537	คน
ภาคตะวันออก	12,547	คน
ภาคตะวันตก	9,064	คน
ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ	132,541	คน
รวมทั้งสิ้น	275,466	คน

3.2. การนำเสนออย่างเป็นแบบแผน (Formal presentation) เป็นการนำเสนอข้อมูลที่มีกฎเกณฑ์และต้องปฏิบัติตามมาตรฐานที่กำหนดไว้เป็นแบบแผน การนำเสนอวิธีการนี้เป็นลักษณะตาราง แผนภูมิ แผนภาพ และกราฟต่าง ๆ

3.2.1 การนำเสนอโดยใช้ตาราง

เป็นการนำข้อมูลมาจัดเรียงให้อยู่ในรูปของแถวหรือหลัก ตามลักษณะที่สัมพันธ์กัน อยู่ในตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกัน ทำให้สะดวกในการเปรียบเทียบ รวบรัดต่อการนำเสนอ องค์ประกอบทั่วไปของตารางจะมีดังนี้

องค์ประกอบตารางสถิติ ตารางสถิติโดยทั่วไปประกอบด้วย

1. หมายเลขตาราง (table number) ชื่อเรื่อง (title)

หมายเหตุคำนำ (prefatory note)

หัวขั้ว (Stub head)	หัวสดมภ์ (Column head)
ตัวขั้ว (stub entries)	ตัวเรื่อง (body)

หมายเหตุล่าง (footnote)

หมายเหตุแหล่งที่มา (source note)

1. หมายเลขตาราง เป็นตัวเลขที่แสดงลำดับที่ของตาราง ใช้ในกรณีที่มีตารางมากกว่าหนึ่งตารางที่ต้องนำเสนอ

2. ชื่อเรื่อง เป็นข้อความที่อยู่ต่อจากหมายเลขตาราง ชื่อเรื่องที่ใช้ แสดงว่าเป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร ที่ไหน เมื่อไร

3. หมายเหตุคำนำ เป็นข้อความที่อยู่ใต้ชื่อเรื่อง เป็นส่วนที่ช่วยให้รายละเอียดในตารางมีความชัดเจนยิ่งขึ้น

4. ต้นขั้ว ประกอบด้วย หัวขั้ว และต้นขั้ว ซึ่งหัวขั้วจะอธิบายเกี่ยวกับ ตัวขั้ว ส่วนตัวขั้ว จะแสดงข้อมูลที่อยู่ในแนวนอน

5. หัวเรื่อง ประกอบด้วย หัวสดมภ์ และตัวเรื่อง ซึ่งหัวสดมภ์ใช้อธิบายข้อมูลแต่ละสดมภ์ ตามแนวตั้ง ตัวเรื่อง ประกอบด้วย ข้อมูลที่เป็นตัวเลขโดยส่วนใหญ่

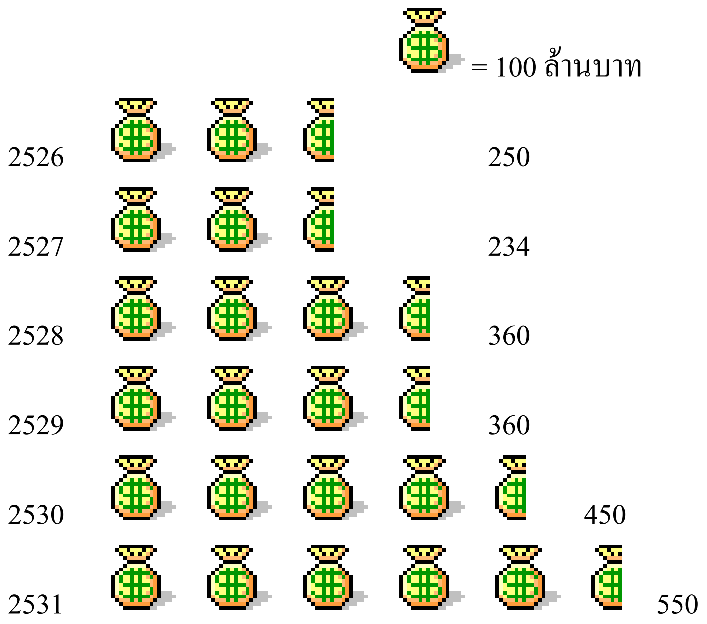
6. หมายเหตุแหล่งที่มา บอกให้ทราบว่าข้อมูลในตารางมาจากที่ใด ช่วยให้ผู้อ่านได้ค้นคว้าเพิ่มเติม

ตัวอย่าง ตารางแสดงจำนวนประชากรของประเทศไทยปีต่าง ๆ จำแนกตามเพศ (สำนักงานสถิติแห่งชาติ)

พ.ศ.	**จำนวนประชากร**		
	ชาย	**หญิง**	**รวม**
2480	7,313,584	1,150,521	14,464,105
2490	8,722,155	8,720,534	17,442,689
2503	13,154,149	13,103,767	26,257,916
2513	17,123,862	17,273,512	34,397,374
2523	22,008,063	22,170,074	44,278,137

3.2.2 แผนภูมิรูปภาพ (Pictogram) เป็นแผนภูมิที่ใช้รูปภาพแทนตัวเลขของข้อมูล เช่นรูปภาพคน 1 คน แทนจำนวนคน 100 คน ถ้ามีคน 550 คน จะมีรูปภาพคน 5 รูป และภาพคนที่ไม่สมบูรณ์อีกครึ่งรูปการนำเสนอข้อมูลในรูปภาพทำให้ดึงดูดความสนใจมากขึ้น

ตัวอย่าง ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างแผนภูมิรูปภาพ ซึ่งแสดงปริมาณที่ไทยส่งสินค้าออกไปขายยังประเทศบรูไนระหว่างปี 2526-2531

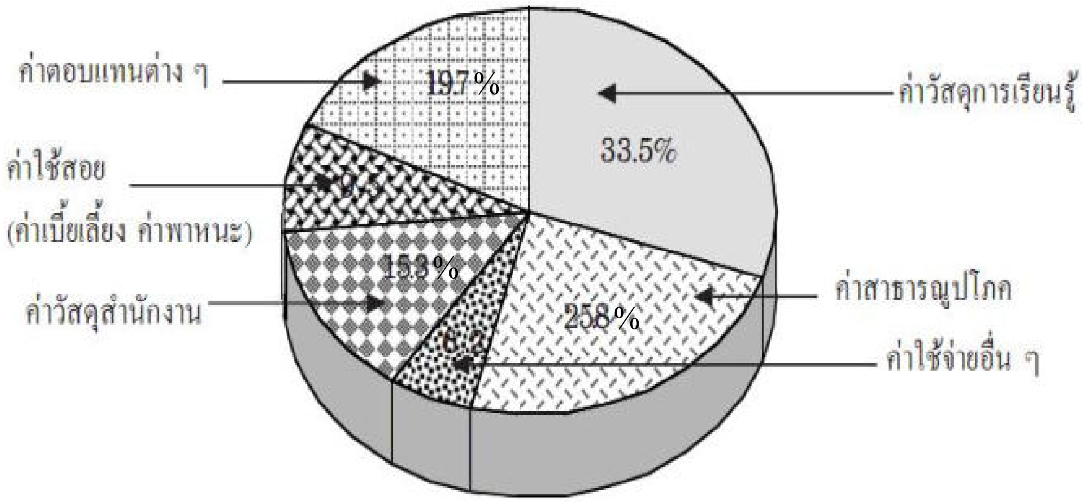


ที่มา : กรมศุลกากร

จากข้อมูลข้างต้น แสดงว่าในปี 2526 ไทยส่งสินค้าไปขายยังประเทศบรูไน 250 ล้านบาท ในปี 2531 ส่งสินค้าไปขาย 550 ล้านบาท เป็นต้น

3.2.3 แผนภูมิรูปวงกลม คือ แผนภูมิที่แสดงให้เห็นถึงรายละเอียดส่วนย่อย ๆ ของข้อมูลที่นำมาเสนอ การนำเสนอข้อมูลในลักษณะนี้จะเสนอในรูปของวงกลมโดยคำนวณส่วนย่อย ๆ ของข้อมูลที่จะแสดงทั้งหมด หลังจากนั้นแบ่งพื้นที่ของรูปวงกลมทั้งหมดออกเป็น 100 ส่วน หลังจากนั้นก็หาพื้นที่ของแต่ละส่วนย่อย ๆ ที่จะแสดง

ตัวอย่าง แผนภูมิรูปวงกลมแสดงการเปรียบเทียบงบประมาณด้านต่าง ๆ ที่ใช้ในสถานศึกษา (ยกเว้นเงินเดือน – ค่าจ้าง)

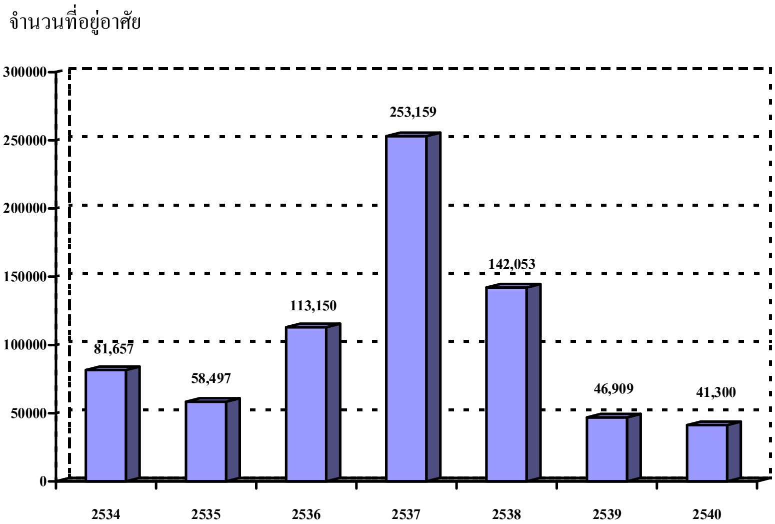


3.2.4 แผนภูมิแท่ง (Bar chart) การนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิแท่ง เป็นการนำเสนอข้อมูลโดยใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอาจเรียงในแนวตั้ง หรือแนวนอนก็ได้ ซึ่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปจะมีความกว้างเท่าๆกันทุกรูป ส่วนความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขึ้นอยู่กับขนาดของข้อมูล นิยมเรียกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแต่ละรูปว่า “แท่ง” (bar) ระยะห่างระหว่างแท่งให้พองาม และเพื่อให้จำแนกลักษณะที่แตกต่างกันของข้อมูลในแต่ละแท่งให้ชัดเจน และสวยงามจึงได้มีการแรเงา หรือระบายสี และเขียนตัวเลขกำกับไว้บนตอนปลายของแต่ละแท่งด้วยก็ได้

3.2.4. 1 แผนภูมิแท่งเชิงเดี่ยว (Simple bar chart)

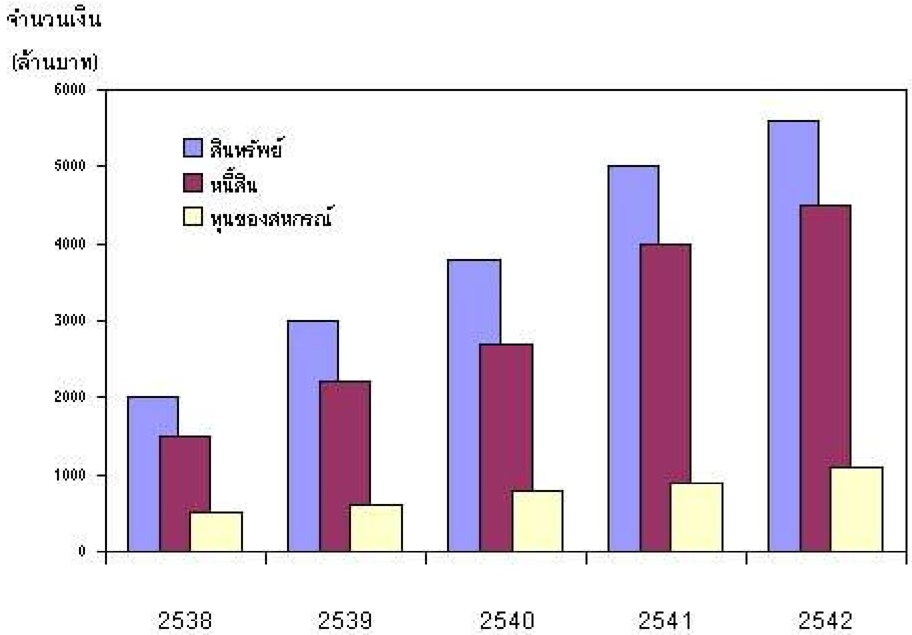
ตัวอย่าง การเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิแท่งเชิงเดี่ยว

แผนภูมิแสดงจำนวนที่อยู่อาศัยเปิดตัวใหม่ในเขตกทม. และปริมณฑล



3.2.4.2แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน (Multiple bar chart) ข้อมูลสถิติที่จะนำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งต้องเป็นข้อมูลประเภทเดียวกันและหน่วยของตัวเลขเป็นหน่วยเดียวกันและควรใช้เปรียบเทียบข้อมูล 2 ชุด หรือมากกว่า 2 ชุดก็ได้ ซึ่งอาจเป็นแผนภูมิในแนวตั้งหรือแนวนอน ก็ได้สิ่งที่สำคัญต้องมีกุญแจ (Key) อธิบายว่าแท่งใดหมายถึงข้อมูลชุดใดไว้ที่ด้วย ดูตัวอย่างจากรูปที่ 3

แผนภูมิแท่งแสดงสินทรัพย์ หนี้สินและทุนของสหกรณ์ออมทรัพย์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



3.2.5 การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้น

การนำเสนอข้อมูลที่มีลักษณะเป็นกราฟเส้นนั้น ลักษณะของกราฟอาจจะเป็นเส้นตรงหรือไม่ก็ได้ จุดสำคัญของการนำเสนอโดยใช้กราฟเส้นก็เพื่อจะให้ผู้อ่านมองเห็นแนวโน้มการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของข้อมูล เช่นข้อมูลที่เกี่ยวกับเวลา ถ้าเรานำเสนอโดยใช้กราฟเส้น เราก็สามารถจะมองเห็นลักษณะของข้อมูลในช่วงเวลาต่าง ๆ ว่ามีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงมากน้อยเพียงใด นอกจากนี้กราฟเส้นยังทำให้เรามองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล(ถ้ามีข้อมูลหลาย ๆ ชุด) และสามารถนำไปใช้ในการคาดคะเน หรือพยากรณ์ข้อมูลนั้นได้อีกด้วย

โดยทั่วไป การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้นก็จะมีลักษณะเช่นเดียวกับตาราง กล่าวคือ เราต้องบอก หมายเลขภาพ ชื่อภาพ แหล่งที่มาของข้อมูล และที่สำคัญต้องบอกให้ทราบว่าแกนนอนและแกนตั้งใช้แทนข้อมูลอะไรและมีหน่วยเป็นอย่างไร

3.2.5.1 กราฟเชิงเดี่ยว คือ กราฟที่แสดงลักษณะของข้อมูลเพียงชุดเดียว เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณสินค้าที่นำเข้าจากประเทศสิงคโปร์ ข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณน้ำฝนประจำเดือนต่าง ๆ ปี พ.ศ. 2543 เป็นต้น

ตัวอย่าง ตารางแสดงปริมาณสินค้าที่นำเข้าจากประเทศสิงคโปร์

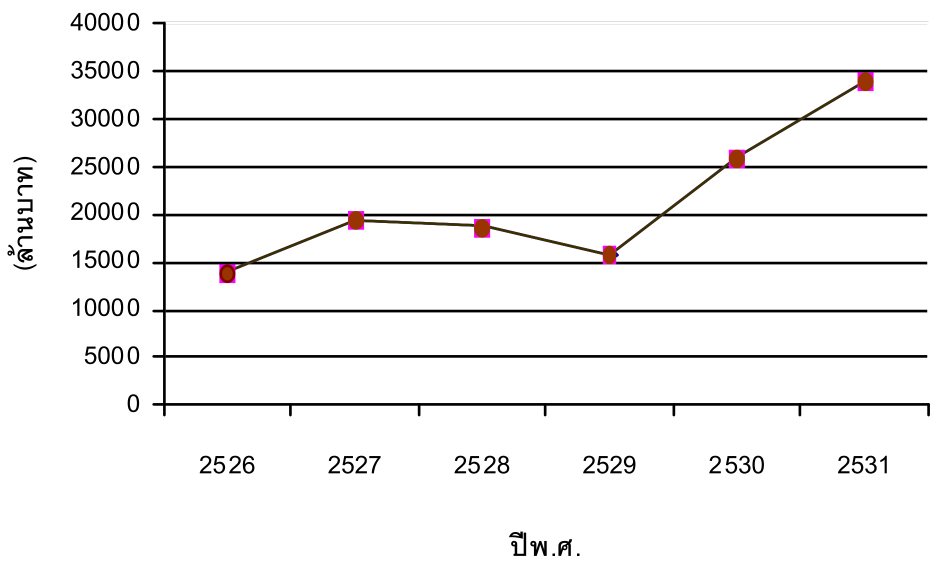
ปี	ปริมาณสินค้านำเข้า (ล้านบาท)
2526	14,623
2527	19,373
2528	18,746
2529	15,845
2530	26,030
2531	34,034

ที่มา : กรมศุลกากร

จงเสนอข้อมูลดังกล่าวโดยใช้กราฟเชิงเดี่ยว

วิธีทำ จากข้อมูลดังกล่าวเราสามารถนำมาเขียนเป็นกราฟเส้นได้ดังนี้

ปริมาณสินค้าที่นำเข้าจากประเทศสิงคโปร์ ปีพ.ศ. 2526 – 2531



3.2.5.2 กราฟเชิงซ้อน กราฟเชิงซ้อนเป็นการนำเสนอข้อมูลในลักษณะเดียวกับแผนภูมิแท่งเชิงซ้อน กล่าวคือเป็นการนำเสนอเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป เช่นการเปรียบเทียบระหว่าง จำนวนอุบัติเหตุทางอากาศ กับจำนวนอุบัติเหตุทางเรือ จำนวนคนเกิดกับจำนวนคนตาย เป็นต้น

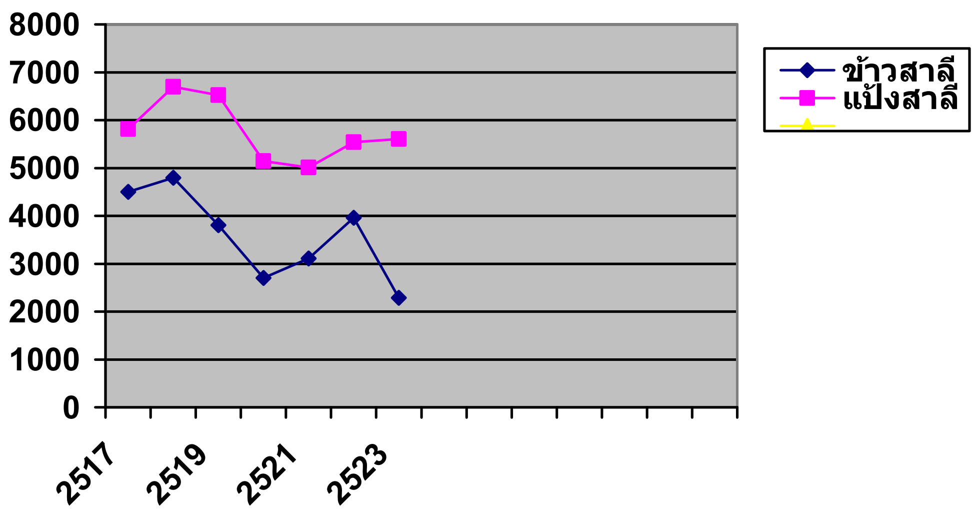
ตัวอย่างที่ 24 ตารางแสดงราคาข้าวสาลี และราคาแป้งข้าวสาลีที่ประเทศไทยสั่งเข้ามาตั้งแต่ปี 2517 – 2523

ปี	ราคาข้าวสาลี(บาท/ตัน)	ราคาแป้งข้าวสาลี(บาท/ตัน)
2517	4,501	5,811
518	4,796	6,695
2519	3,806	6,521
2520	2,892	5,142
2521	3,112	5,010
2522	3,957	5,538
2523	2,288	5,605

ที่มา : วารสารเศรษฐกิจ ธนาคารกรุงเทพ จำกัด ฉบับเดือนมิถุนายน 2515 ปีที่ 14 เล่มที่ 6

วิธีทำ จากข้อมูลดังกล่าวสามารถนำมาเขียนกราฟเส้นได้ดังนี้

กราฟแสดงราคาข้าวสาลี และราคาแป้งข้าวสาลีที่ประเทศไทยสั่งเข้ามาตั้งแต่ปี 2517 – 2523



แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ว่า จำนวนคนไข้ (คนไข้ใน) ของโรงพยาบาลอำเภอแห่งหนึ่งในปี 2545 และ 2546 ซึ่งได้มากจากการสำรวจของโรงพยาบาลเป็นดังนี้ พ.ศ. 2545 มีเพศชาย 4,571 คน หญิง 3,820 คน ปี 2546 มีเพศชาย 5,830 หญิง 4,259 คน จงนำเสนอข้อมูล

ก. ในรูปบทความ

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

ข. ในรูปบทความ / ข้อความกึ่งตาราง

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………….

2. จากข้อมูลที่นำเสนอในรูปตาราง ร้อยละของนักศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของสถาบันการศึกษาแห่งหนึ่ง ได้ผลการเรียนใน 4 วิชาหลักในปี 2546 มีดังนี้

หมวดวิชา	**ร้อยละของระดับผลการเรียน**				
	4	3	2	1	0
คณิตศาสตร์	4.49	9.51	22.88	43.58	16.28
ภาษาไทย	5.82	12.14	26.55	41.18	13.10
วิทยาศาสตร์	4.82	11.23	23.50	39.81	19.91
สังคมศึกษา	9.04	16.60	29.10	34.75	9.09
รวม	**84.55**			**13.67**	

จากตารางจงตอบคำถามต่อไปนี้

1. หมวดวิชาใดที่นักศึกษาได้ระดับผลการเรียน 4 มากที่สุดและได้ระดับ 0 น้อยที่สุดและคิดเป็นร้อยละเท่าไร
2. นักศึกษาส่วนใหญ่ได้ระดับผลการเรียนใด
3. ระดับผลการเรียนที่นักศึกษาจำนวนมากที่สุดได้รับ
4. ระดับผลการเรียนที่นักศึกษาจำนวนน้อยที่สุดได้รับ
5. กล่าวโดยสรุปถึงผลการเรียนของสถาบันแห่งนี้เป็นอย่างไร

6. ตารางแสดงปริมาณผลิตยางพาราของประเภทต่าง ๆ ในปี พ.ศ. 2544 และปี พ.ศ. 2545 ดังนี้

ประเทศ	**ปริมาณการผลิต (ล้านตัน)**	
	ปี 2544	ปี 2545
มาเลเซีย	2.5	3.0
อินโดนีเซีย	3.0	4.0
ไทย	2.0	3.5
เวียดนาม	1.5	2.0
ลาว	1.0	1.5

จงเขียน

1. แผนภูมิแท่งแสดงการผลิตยางพาราของประเทศต่าง ๆในปี 2544
2. แผนภูมิแท่งและการเปรียบเทียบการผลิตยางพาราของประเทศต่าง ๆในปี 2544 และในปี 2545
3. แผนภูมิวงกลมแสดงการเปรียบเทียบการผลิตยางพาราของประเทศต่าง ๆ ในปี 2544
4. จงเขียนกราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณสัตว์น้ำจืดและสัตว์น้ำเค็มที่จับได้ตั้งแต่ พ.ศ. 2540 ถึง พ.ศ. 2546

พ.ศ.	**ปริมาณที่จับได้ (พันตัน)**	
	สัตว์น้ำจืด	**สัตว์น้ำเค็ม**
2540	1,550	130
2541	1,529	141
2542	1,395	159
2543	2,068	161
2544	1,538	122
2545	1,352	147
2546	1,958	145

3.3 สถิติกับการตัดสินใจ

ในชีวิตประจำวันของแต่ละบุคคล จะมีการตัดสินใจเกี่ยวกับการดำเนินชีวิตในแต่ละเรื่อง แต่ละเหตุการณ์อยู่ตลอดเวลา การเลือกหรือการตัดสินใจที่จะเลือกวิธีการต่างๆ ย่อมต้องอาศัยความเชื่อ ความรู้ และประสบการณ์ สามัญสำนึก ข่าวสาร ข้อมูลต่างๆ มาประกอบการเลือกหรือการตัดสินใจดังกล่าว เพื่อให้สามารถดำรงชีวิตอย่างถูกต้อง และมีโอกาสผิดพลาดน้อยที่สุด

ตัวอย่างเช่น การตัดสินใจที่เกิดจากการเลือกในสิ่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

การเลือกสิ่งต่าง ๆ	**การตัดสินใจ**
☐ การเลือกซื้อสินค้าในห้างฯ	- จากความนิยม, ราคาสินค้า, คุณภาพและปริมาณของสินค้าที่จะใช้
☐ การเดินทางไปทำงาน	- ระยะทางที่ไป, เวลาที่ใช้ในการเดินทาง พาหนะที่จะไป, ความสะดวกสบาย
☐ การลงทุนการประกอบกิจการ	- ผลผลิตที่ได้ ทุนที่จะลงไป ความนิยมของผู้รับ/ผู้ซื้อ, ค่าใช้จ่ายที่ต้องดำเนินการ เป็นต้น

จะเห็นได้ว่า การเลือกตัดสินใจจะทำเรื่องใดๆ จำเป็นต้องมีข้อมูลในการตัดสินใจในการเลือกทำสิ่งนั้น ๆ ให้ดีที่สุด ข้อมูลที่มีอยู่หรือหามาได้ หรือข้อมูลที่วิเคราะห์เบื้องต้นแล้ว ยังเรียกว่า " สารสนเทศหรือข่าวสาร" (Information) จะช่วยให้การตัดสินใจดียิ่งขึ้น

หลักในการเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจ จะต้อง

- เชื่อถือได้
- ครบถ้วน
- ทันสมัย

ถ้าข้อมูลที่มีอยู่ไม่สามารถนำมาประกอบการตัดสินใจได้ อาจทำให้เป็นสารสนเทศเสียก่อน ซึ่งผู้ใช้จะต้องเลือกวิธีวิเคราะห์ข้อมูลที่เหมาะสมกับคำตอบที่ต้องการได้รับเสียก่อน นั่นคือ วิธีวิเคราะห์ข้อมูลและเป็นตัวกำหนดข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้

ตัวอย่าง ข้อมูลและสารสนเทศ

รายการ	ข้อมูล	สารสนเทศ
1. สุดาสูง 153 เซนติเมตร	✓	
2. นักศึกษาทางไกลสอบวิชาภาษาไทยได้คะแนนเฉลี่ย 65 คะแนน (คะแนนเต็ม 100 คะแนน)		✓
3. มานพมีรายได้เดือนละ 4,100 บาท	✓	
4. บริษัทได้จัดงานเลี้ยงวันเกิดเฉลี่ยออกเงินคนละ 350 บาท		✓
5. ผู้หญิงไทยมีน้ำหนักโดยเฉลี่ย 55 กิโลกรัม		✓

ทุกวันนี้สถิติถูกนำมาใช้ประโยชน์หลายๆด้าน หลายสาขา และมีส่วนเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์มากขึ้น ทุกวงการ ทั้งส่วนที่เป็นข้อความ ตาราง รูปภาพ ป้ายประกาศ และเอกสารทางวิชาการต่างๆ เป็นต้น โดยเฉพาะหน่วยงานที่ทำงานด้านนโยบายและการวางแผน จะต้องใช้สถิติทั้งข้อมูล และสารสนเทศเพื่อจัดทำ นโยบาย วางแผนงาน เพื่อใช้เป็นเครื่องมือสนับสนุนในการตัดสินใจต่างๆ ของหน่วยงานทั้งภาครัฐและเอกชน

ในส่วนของภาครัฐบาลต้องอาศัยสถิติในการวัดภาพรวมทางด้านเศรษฐกิจ เช่น การหาผลิตภัณฑ์มวลรวมของประเทศ การบริโภค การออม การลงทุน ตลอดจนการวัดการเปลี่ยนแปลงค่าของเงินเป็นต้น นอกจากนี้ยังอาศัยวิธีการทางสถิติช่วยอธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ การทดสอบสมมติฐานต่างๆโดยพยายามพยากรณ์และคาดคะเนแนวโน้มภาวะเศรษฐกิจของประเทศ

ในด้านธุรกิจการค้าตัวเลขสถิติมีประโยชน์เป็นเครื่องมือช่วยรักษาและปรับปรุงคุณภาพการผลิต ใช้เป็นเครื่องมือในการคัดเลือกและยกฐานะของคนงาน หรือใช้เป็นเครื่องมือในการควบคุมเพื่อให้ใช้วัตถุดิบอย่างประหยัด มีการคาดคะเนความต้องการของลูกค้าในอนาคต ซึ่งการตัดสินใจเกี่ยวกับการค้าการขายต้องอาศัยสถิติทั้งสิ้น

สำหรับในด้านสังคมและการศึกษา ในวงการสาธารณสุขต้องใช้ข้อมูลสถิติเพื่อการดูแลรักษาสุขภาพ การประมวลผล และคาดการณ์แนวโน้มการระวังสุขภาพ ต้องอาศัยข้อมูลทางสถิติประกอบการตัดสินใจ ส่วนในด้านการศึกษาสถิติจะช่วยในการวางนโยบายและแผนการจัดการศึกษาทั้งในระดับชาติและระดับท้องถิ่น นอกจากนี้สถิติยังช่วยติดตาม วัดผลและประเมินผลการจัดการเรียนการสอนและการบริหารจัดการอีกด้วย

แบบฝึกหัดที่ 4

1. การเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจต้องอาศัยหลักการใดบ้าง
2. ข้อมูล ต่างกับ สารสนเทศ อย่างไร จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบด้วย

บทที่ 8
ความน่าจะเป็น

สาระสำคัญ

1. การนับจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการกระทำ หรือการทดลองใดๆ ต้องอาศัยกฎเกณฑ์การนับจึงจะทำให้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว
2. ความน่าจะเป็น คือ จำนวนที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด สิ่งที่จำเป็นต้องทราบทำความเข้าใจ คือ
   - การทดลองสุ่ม (Random Experiment)
   - แซมเปิลสเปซ (Sample Space)
   - เหตุการณ์ (Event)
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ เป็นการเปรียบเทียบจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์นั้นๆ กับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ซึ่งเป็นค่าที่จะช่วยในการพยากรณ์หรือการตัดสินใจได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาจำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นของเหตุการณ์ โดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้อย่างง่ายได้
2. อธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการคาดการณ์และช่วยในการตัดสินใจ

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้

เรื่องที่ 2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

เรื่องที่ 3 การนำความน่าจะเป็นไปใช้

1. กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้

ในชีวิตประจำวันของคนเรามีการกระทำหรือการทดลองหลายอย่างที่สามารถมีวิธีการที่จะเกิดผลลัพธ์ได้หลายวิธี การหาจำนวนรูปแบบหรือจำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้จากการนับทั้งหมด โดยมีกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับจากการทำงานดังนี้

1. 1. การทำงานที่มี 2 อย่างหรือสองขั้นตอน

ถ้างานอย่างแรกมีวิธีทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีทำงานอย่างแรกมีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี แล้วจำนวนวิธีที่ทำงานทั้งสองอย่างเท่ากับ $n_1\ n_2$ วิธี

สามารถเขียนแผนผังการทำงานได้ดังนี้

	งานอย่างที่ 1		งานอย่างที่ 2
	$\boxed{}$		$\boxed{}$
นับได้	n_1 วิธี	$\times$	n_2 วิธี

จำนวนวิธีทำงานทั้งสองอย่าง = $n_1 \times n_2$ วิธี

เพื่อความเข้าใจให้ง่ายขึ้นสามารถแจกแจงผลการนับแต่ละวิธีได้โดยใช้ แผนภาพต้นไม้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดผลลัพธ์ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ โยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง เป็นการทำงาน 2 อย่าง

	เหรียญที่ 1		เหรียญที่ 2
	$\boxed{}$		$\boxed{}$
จัดได้	2	$\times$	2

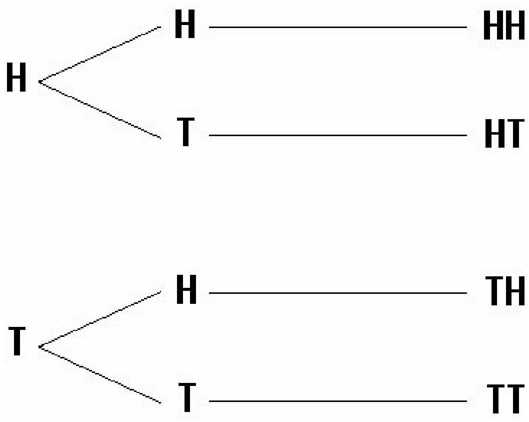
งานแรก การเกิดของเหรียญที่ 1 เกิดได้ 2 วิธี คืออาจเกิดหัว (H) หรือ อาจเกิดก้อย (T) ก็ได้ และในแต่ละวิธีที่เกิดเหรียญที่ 1 ยังมีวิธีเกิดเหรียญที่ 2 ได้อีก

งานที่ 2 การเกิดของเหรียญที่ 2 เกิดได้ 2 วิธี คืออาจเกิดหัว (H) หรืออาจเกิดก้อย (T)

ดังนั้น การโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ = $2 \times 2 = 4$ วิธี

การโยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน เป็นการทำงานที่มี 2 อย่างหรือ 2 ขั้นตอน สามารถแสดงเหตุการณ์ที่เกิด โดยใช้แผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

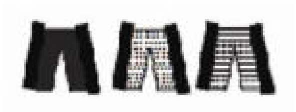
เหรียญที่ 1 เหรียญที่ 2 เหตุการณ์ที่เกิดขึ้น



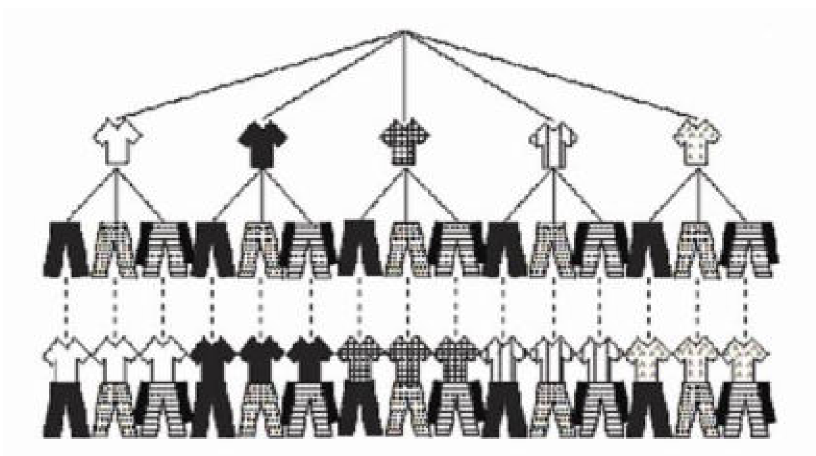
นั่นคือ โยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ 4 วิธี คือ HH, HT, TH, TT ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งมีเสื้อเชิ้ตต่างกัน 5 ตัว

และกางเกงขายาวต่างกัน 3 ตัว



วิธีทำ เราสามารถใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการหาวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้แสดงได้ดังแผนภาพข้างล่างนี้



จากแผนภาพต้นไม้จะพบว่าการแต่งกายของชายคนนี้ที่แตกต่างกันนับได้ทั้งหมด 15 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เป็นการทำงาน 2 อย่าง

	ลูกที่ 1		ลูกที่ 2
	$\boxed{}$		$\boxed{}$
จัดได้	6	$\times$	6

งานอย่างแรก การเกิดของลูกเต๋าลูกที่ 1 ซึ่งมี 6 หน้า เกิดได้ 6 วิธี คืออาจหงายหน้า 1 , 2, 3 …., หรือ 6)

$\therefore$ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง เกิดได้ = $6 \times 6 = 36$ วิธี

สามารถแจกแจงผลลัพธ์ ได้ดังนี้

(1 , 1) (1 , 2) (1 , 3) (1 , 4) (1 , 5) (1 , 6)

(2 , 1) (2 , 2) (2 , 3) (2 , 4) (2 , 5) (2 , 6)

(3 , 1) (3 , 2) (3 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (3 , 6)

(4 , 1) (4 , 2) (4 , 3) (4 , 4) (4 , 5) (4 , 6)

(5 , 1) (5 , 2) (5 , 3) (5 , 4) (5 , 5) (5 , 6)

(6 , 1) (6 , 2) (6 , 3) (6 , 4) (6 , 5) (6 , 6) ตอบ 36 วิธี

1. 2. การทำงานที่มี 3 อย่างหรือสามขั้นตอน

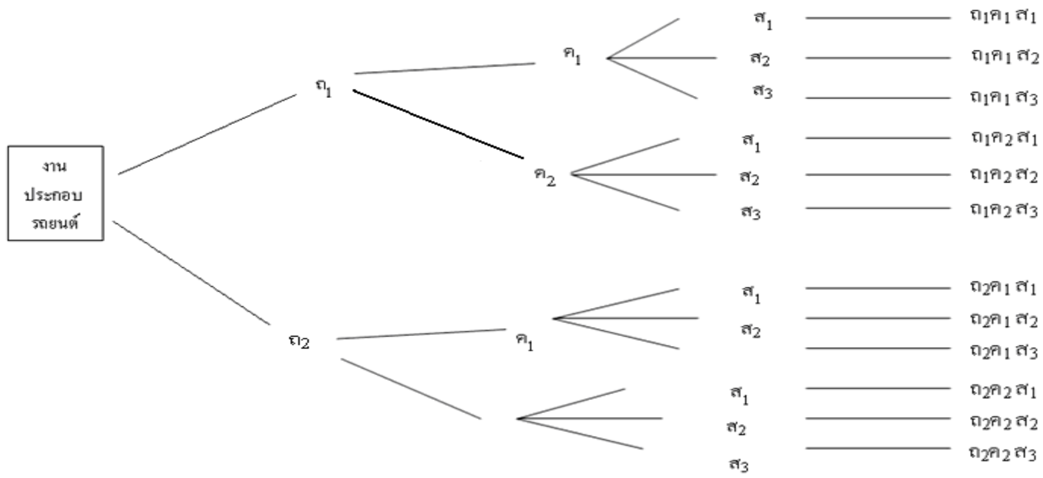
การนับจะมีแนวคิดในทำนองเดียวกัน แต่จำนวนขั้นตอนในการเขียนแผนภาพต้นไม้ หรือการหาผลคูณคาร์ทีเซียน จะมี 3 งานหรือ 3 ขั้นตอนที่ต้องทำต่อเนื่องกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 บริษัทรถยนต์แห่งหนึ่งผลิตตัวถังรถยนต์ออกมา 2 แบบ มีเครื่องยนต์ 2 ขนาด และสีต่าง ๆ กัน 3 สี ถ้าต้องการแสดงรถยนต์ให้ครบทุกแบบ ทุกขนาด และทุกสี จะต้องใช้รถยนต์อย่างน้อยที่สุดกี่คัน

วิธีที่ 1 โดยใช้แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) จะได้ผลดังนี้

การทำงานมี 3 ขั้นคือ

	ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2	ขั้นที่ 3	
	ตัวถัง	เครื่อง	สี	ผลงาน



ดังนั้น จะต้องมีรถยนต์แสดงอย่างน้อย 12 คัน จึงจะครบทุกแบบทุกสีทุกขนาด

วิธีที่ 2 โดยใช้ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A เป็นเซตของตัวถังรถยนต์ A = { $ถ_1$, $ถ_2$ }

B เป็นเซตของเครื่องยนต์ B = { $ค_1$, $ค_2$ }

C เป็นเซตของสีต่าง ๆ B = { $ส_1$, $ส_2$, $ส_3$ }

นำตัวถังและเครื่องยนต์มาประกอบกันได้ดังนี้

$A \times B = \{ (ถ_1, ค_1), (ถ_1, ค_2), (ถ_2, ค_4), (ถ_2, ค_2)\}$

n(AxB) = n(A) x n(B) = 4 แบบ

นำตัวถึงกับเครื่องที่ประกอบแล้วมาทาสีต่าง ๆ

$(A \times B) \times C = \{ (ถ_1, ค_1, ส_1), (ถ_1, ค_1, ส_2), (ถ_1, ค_1, ส_3), (ถ_1, ค_2, ส_1), (ถ_1, ค_2, ส_2), (ถ_1, ค_2, ส_3),$

$(ถ_2, ค_1, ส_1), (ถ_2, ค_1, ส_2), (ถ_2, ค_1, ส_3), (ถ_2, ค_2, ส_1), (ถ_2, ค_2, ส_2), (ถ_2, ค_2, ส_3)\}$

N (A ×B× C) = n(AxB) x n(C)

= n(A) x n(B) x n(C)

= 2 x 2 x 3 = 12

ดังนั้น ต้องใช้รถยนต์แสดงอย่างน้อย 12 คัน

เมื่อพิจารณาแผนภาพต้นไม้และวิธีการของผลคูณคาร์ทีเซียนแล้ว พบว่า สามารถหาจำนวนวิธีหรือจำนวนรูปแบบในการทำงานได้เช่นเดียวกัน จากหลักการของทั้งสองวิธี จึงสามารถนำมาสร้างเป็นกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีในการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งได้ โดยสรุปเป็นกฎได้ดังนี้

สรุปขั้นตอนในการใช้กฎการนับแก้โจทย์ปัญหา

1. พิจารณาว่างานหรือเหตุการณ์ที่โจทย์กำหนดมานั้นคืออะไร จัดแบ่งออกเป็นกี่ขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน
2. พิจารณาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดมาในแต่ละขั้นตอน บันทึกไว้
3. หาจำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำงานได้ในแต่ละขั้น โดยต้องเริ่มจากขั้นที่มีเงื่อนไขมากที่สุดก่อนแล้วจึงพิจารณาขั้นอื่น ๆ ที่มีเงื่อนไขรองลงมา ตามความสำคัญ
4. นำจำนวนวิธีที่ได้ในแต่ละขั้นตอนคูณกัน จะได้จำนวนรูปแบบหรือจำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 4 ในการเลือกตั้งกรรมการชุดหนึ่งจะประกอบไปด้วย ประธาน รองประธาน เหรัญญิก และเลขา โดยกรรมการแต่ละคนจะดำรงตำแหน่งได้เพียงตำแหน่งเดียวเท่านั้น ถ้ามีผู้สมัครทั้งหมด 6 คน เป็นชาย 2 คน เป็นหญิง 4 คน ผลการเลือกตั้งกรรมการชุดนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่แบบต่างกัน โดยที่

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. กำหนดให้ประธานเป็นชาย และเลขาต้องเป็นหญิง
3. กรรมการต้องเป็นหญิงล้วน ๆ

วิธีทำ มีผู้สมัคร 6 คน เป็นชาย 2 คน เป็นหญิง 4 คน ให้เลือกกรรมการ 4 ตำแหน่ง ประธาน รองประธาน เหรัญญิก เลขา

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม แต่ละคนเป็นได้ตำแหน่งเดียว

ตำแหน่งประธาน เลือกได้	6	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	5	วิธี
ตำแหน่งเหรัญญิก เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งเลขา เลือกได้	3	วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ วิธี

2) กำหนดประธานเป็นชาย และเลขาต้องเป็นหญิง

ตำแหน่งประธานเป็นชาย เลือกได้	2	วิธี
ตำแหน่งเลขาที่เป็นหญิง เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งเหรัญญิก (คนที่เหลือ) เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	3	วิธี (คนที่เหลือสุดท้าย)

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 2 \times 4 \times 3 \times 4 = 96$ วิธี

3) กรรมการต้องเป็นผู้หญิงล้วน ๆ

ตำแหน่งประธานเป็นชาย เลือกได้	2	วิธี
ตำแหน่งเลขาเป็นหญิง เลือกได้	4	วิธี
ตำแหน่งรองประธาน เลือกได้	4	วิธี (เฉพาะหญิงที่เหลือ)
ตำแหน่งเหรัญญิก เลือกได้	3	วิธี (เฉพาะหญิงที่เหลือ)

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกกรรมการมี $= 2 \times 4 \times 3 \times 4 = 96$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 จากอักษรในคำว่า “ PHYSIC” นำมาสร้างคำใหม่ประกอบด้วย 3 อักษร ต่างกัน (ไม่สนใจความหมายของคำเหล่านั้น) โดยที่

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. ต้องเป็นพยัญชนะทั้งหมด

วิธีทำ อักษรในคำว่า PHYSIC เป็นสระ 1 ตัวและพยัญชนะ 5 ตัว รวมทั้งหมด 6 ตัวอักษร

อักษรตัวที่ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

1. สร้างคำประกอบด้วย 3 ตัวอักษร สร้างได้ $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี
2. มีเงื่อนไขว่าต้องเป็นพยัญชนะทั้งหมด สร้างได้ $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6

ห้องประชุมแห่งหนึ่งมี 3 ประตู จงหาวิธีในการเดินเข้า - ออกห้องประชุม โดยมีเงื่อนไขต่างกัน ดังนี้

1. จำนวนวิธีในการเดินเข้า
2. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก
3. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก โดยไม่ซ้ำประตูกัน
4. จำนวนวิธีในการเดินเข้า - ออก โดยใช้ประตูเดิม

วิธีทำ ประตูห้องประชุมมี 3 ประตู หมายเลข 1 2 และ 3

การเดิน $\boxed{\text{เข้า}}$ $\boxed{\text{ออก}}$

1. จำนวนวิธีเดินเข้าห้องประชุม $= 3$ วิธี
2. จำนวนวิธีการเดิน เข้า - ออก $= 3 \times 3 = 9$ วิธี (ใช้ประตูซ้ำได้)
3. จำนวนวิธีการเดินเข้า - ออก โดยไม่ซ้ำประตูกัน $= 3 \times 2 = 6$ วิธี

4. จำนวนวิธีการเดินเข้า - ออก โดยใช้ประตูเดิม $= 3 \times 1 = 3$ วิธี

ตัวอย่างที่ 7

ครูมีหนังสือ 5 เล่มแตกต่างกัน ต้องการแจกให้นักเรียน 4 คน จงหาจำนวนวิธีแจกหนังสือโดยที่

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. ไม่มีใครได้หนังสือเกิน 1 เล่ม

วิธีทำ การแจกหนังสือต้องพิจารณาการแจกทีละเล่ม

หนังสือเล่มที่ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

1. ไม่มีเงื่อนไข (แจกซ้ำได้) ดังนั้นแจกได้ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ วิธี
2. ไม่มีใครได้เกิน 1 เล่ม แปลว่า ไม่มีใครได้ซ้ำ ได้แล้วจะไม่แจกให้อีก

   ดังนั้น จะมีวิธีแจกหนังสือ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ วิธี

แบบฝึกหัดที่ 1

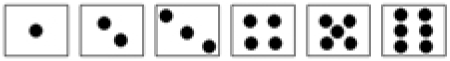
1. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง จงหาจำนวนที่เหรียญจะขึ้นหน้าต่างๆ โดยวิธีเขียนแผนภูมิต้นไม้
2. ในการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย โจทย์แบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ โจทย์แต่ละข้อ มีคำตอบที่ถูกต้องเพียงหนึ่งตัวเลือกเท่านั้น แล้วจำนวนวิธีการตอบคำถามที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่วิธี
3. มีนักเรียน 5 คน ยืนเข้าแถวเพื่อซื้ออาหารกลางวันของร้านหนึ่ง จงหาว่าจำนวนวิธีที่ยืนเข้าแถวที่แตกต่างกัน มีทั้งหมดกี่วิธี
4. มีชาย 6 คน หญิง 5 คน ต้องการจัดคู่แข่งขันระหว่างชาย 1 คน หญิง 1 คนในการแข่งขันกีฬาเทนนิส มีจำนวนทั้งหมดกี่วิธี
5. เพื่อน 3 คน นักกันไปรับประทานอาหารเย็นที่ภัตตาคารและ ซื้อของที่ห้างสรรพสินค้า โดยเลือกที่จะไปรับประทานอาหารและซื้อของ ซึ่งมีภัตตาคาร 5 แห่ง และมีห้างสรรพสินค้า 4 แห่ง ทั้งสามคนนี้จะมีวิธีเลือกกระทำดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี
6. บริษัทแห่งหนึ่งเปิดรับสมัครพนักงานเข้าทำงาน โดยพิจารณาจากเงื่อนไขคือ เพศชาย หญิงระดับอายุมี 6 ระดับ และมีสาขาวิชาชีพ 10 ประเภท แล้วบริษัทนี้จะมีวิธีการจำแนกผู้สมัครได้ทั้งหมดกี่วิธี
7. จากการสัมภาษณ์รับคนเข้าทำงานจำนวน 8 คน จะมีวิธีจะคัดเลือกได้พนักงานหนึ่งคนจากผู้เข้าสัมภาษณ์ทั้งหมด
8. จงเขียนแผนภาพต้นไม้เพื่อแสดงผลที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 4 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการโยนเหรียญครั้งนี้ โดยที่
    1. ไม่มีหน้าหัวเลย
    2. มีหน้าหัวเพียง 1 ครั้ง
    3. มีหน้าทั้ง 2 ครั้ง
    4. มีหน้าหัวเพียง 3 ครั้ง
    5. มีหน้าหัว 4 ครั้ง

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ในชีวิตประจำวันมักพบกับการคาดคะเน หรือการประมาณเหตุการณ์ หรือโอกาส เพื่อใช้ในการตัดสินใจ โอกาสที่เหตุการณ์นั้น จะเกิดได้มีมากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์นั้น กับจำนวนครั้งของการทำงานผู้เรียนจึงต้องทราบ และทำความเข้าใจ กับคำเหล่านี้

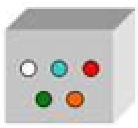
1. การทดลองสุ่ม (Random Experiment) คือ การทดลองที่ไม่สามารถระบุผลลัพธ์ได้อย่างแน่นอน แต่บอกได้ว่าผลลัพธ์ของการทดลองนั้นมีโอกาสเกิดอะไรขึ้นได้บ้าง

ตัวอย่างที่ 1 การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง แต้มที่จะเกิดขึ้นได้ คือ แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ซึ่งไม่สามารถบอกได้ว่าจะเป็นแต้มอะไรใน 6 แต้มนี้



ดังนั้นผลลัพธ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นคือแต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6

ตัวอย่างที่ 2 การหยิบลูกปิงปอง 1 ลูก จากกล่อง ซึ่งมี 5 ลูก 5 สี ลูกปิงปองที่หยิบได้อาจจะเป็น ลูกปิงปองสีขาว ฟ้า แดง เขียว หรือส้ม



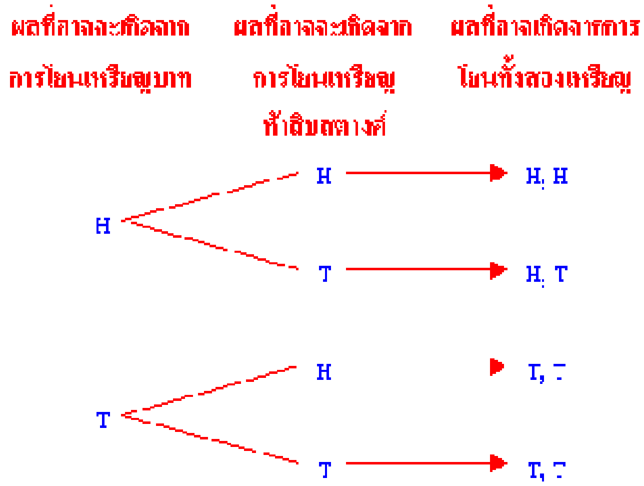
ดังนั้นผลลัพธ์ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นคือ ลูกปิงปองสีขาว ฟ้า แดง เขียว หรือส้ม

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนผลที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดในการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ และเหรียญห้าสิบสตางค์ 1 เหรียญ

<u>วิธีทำ</u>

ในการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ ผลที่อาจเกิดขึ้นคือหัวหรือก้อย ถ้าให้ H แทน หัว และให้ T แทน ก้อย

ในการหาผลที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการโยนเหรียญบาทและเหรียญห้าสิบสตางค์อย่างละ 1 เหรียญ อาจใช้แผนภาพช่วยได้ดังนี้



ฉะนั้น ถ้าเราใช้คู่อันดับเขียนผลทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้โดยให้สมาชิกตัวหนึ่งของคู่อันดับแทนผลที่อาจเกิดขึ้นจากเหรียญบาท สมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับแทนผลที่อาจเกิดขึ้นจากเหรียญห้าสิบสตางค์ จะได้

ผลทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ คือ (H, H), (H, T), (T, H) และ (T, T)

2. แซมเปิลสเปซ (Sample Space) เป็นเซตที่มีสมาชิกประกอบด้วยสิ่งที่ต้องการ ทั้งหมด จากการทดลองอย่างใดอย่างหนึ่ง (บางครั้งเรียกว่า Universal Set) เขียนแทนด้วย S

เช่น **ตัวอย่างที่ 4** ในการโยนลูกเต๋าถ้าต้องการดูว่าหน้าอะไรจะขึ้นมาจะได้

ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้คือ ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5 หรือ 6

ดังนั้นแซมเปิลสเปซที่ได้ คือ S = $\{$ 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\}$

ตัวอย่างที่ 5 จากการทดลองสุ่มโดยการทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูก

1. จงหาแซมเปิลสเปซของแต้มของลูกเต๋าที่หงายขึ้น

วิธีทำ 1. เนื่องจากโจทย์สนใจแต้มของลูกเต๋าที่หงายขึ้น ดังนั้นเราต้องเขียนแต้มของลูกเต๋าที่มีโอกาสที่จะหงายขึ้นมาทั้งหมด และเพื่อความสะดวกให้ (a , b) แทนผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้น โดยที่

a แทนแต้มที่หงายขึ้นของลูกเต๋าลูกแรก

b แทนแต้มที่หงายขึ้นของลูกเต๋าลูกที่สอง

ดังนั้นแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มคือ

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

3. เหตุการณ์ (event) คือ เซตที่เป็นสับเซตของ Sample Space หรือเหตุการณ์ที่เราสนใจ จากการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 7 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนแต้มที่ได้ จะได้

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้าให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว จะได้ E1 = $\{3, 6\}$

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 2 จะได้ E2 = $\{3, 4, 5, 6\}$

ตัวอย่างที่ 8 ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 2 ลูก หยิบลูกบอลออกจากถุง 2 ลูก จงหา

1. แซมเปิลสเปซของสีของลูกบอล และเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลสีขาว
2. แซมเปิลสเปซของลูกบอลที่หยิบมาได้ และเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลเป็นสีขาว 1 ลูก สีแดง 1 ลูก

วิธีทำ 1. เนื่องจากเราสนใจเกี่ยวกับสีของลูกบอล และลูกบอลมีอยู่สองสีคือสีขาวและสีแดง

ดังนั้น แซมเปิลสเปซ S = {ขาว, แดง}

สมมติให้ B เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลสีขาว

ดังนั้น B = {ขาว}

2. เนื่องจากเราสนใจแซมเปิลสเปซของลูกบอลแต่ละลูกที่ถูกหยิบขึ้นมา

ดังนั้นแซมเปิลสเปซ S คือ

S = {ข$_1$ข$_2$,ข$_1$ข$_3$,ข$_1$ด$_1$,ข$_1$ด$_2$,ข$_2$ด$_3$,ข$_2$ด$_1$,ข$_2$ด$_2$,ข$_3$ด$_1$,ข$_3$ด$_2$,ด$_1$ด$_2$}

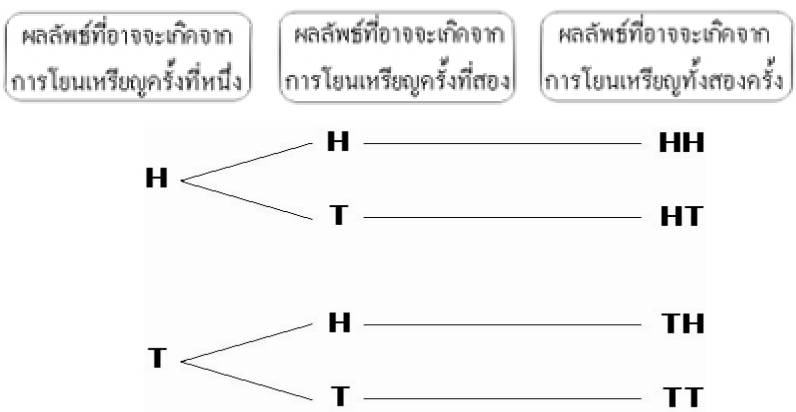
ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่ผลลัพธ์เป็นลูกบอลสีขาว 1 ลูก และ สีแดง 1 ลูก

ดังนั้น เหตุการณ์ C คือ

C = {ข$_1$ด$_1$,ข$_1$ด$_2$,ข$_2$ด$_1$,ข$_2$ด$_2$,ข$_3$ด$_1$,ข$_3$ด$_2$}

<u>**หมายเหตุ**</u> **ข** แทน ขาว และ **ด** แทน แดง

ตัวอย่างที่ 10 โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง จงหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง การหาผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากการโยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง โดยใช้แผนภาพต้นไม้ ดังนี้



ผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 4 แบบ คือ HH, HT, TH และ TT
นั่นคือผลลัพธ์ของ เหตุการณ์ที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง มี 3 แบบ คือ HH, HT และ TH

4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ คือ จำนวนที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งมีโอกาสเกิดขึ้น มากหรือน้อยเพียงใด

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ เท่ากับอัตราส่วนของจำนวนเหตุการณ์ที่เราสนใจ (จะให้เกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นก็ได้) ต่อจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ ซึ่งมีสูตรในการคิดคำนวณดังนี้

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์} = \frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เราสนใจ}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้}}$$

เมื่อผลทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นจากทดลองสุ่มแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน

กำหนดให้ E แทน เหตุการณ์ที่เราสนใจ

P(E) แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

n(E) แทน จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์

n(S) แทน จำนวนสมาชิกของผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกปิงปอง 4 ลูก เขียนหมายเลขกำกับไว้ดังนี้คือ 0, 1, 2, 3 ถ้าสุ่มหยิบมา 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขมากกว่า 3

วิธีทำ ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ

$S = \{(0, 1),(0, 2),(0, 3),(1, 2),(1, 3),(2, 3)\}$

จะได้ $n(S) = 6$

E เป็นเหตุการณ์หรือสิ่งที่โจทย์อยากทราบ

$E = \{(1, 3),(2, 3)\}$

จะได้ $n(E) = 2$

นั่นคือ จากสูตรข้างบนคือ $p(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขมากกว่า 3 เท่ากับ $\dfrac{1}{3}$

ข้อสังเกต

1. สมาชิกทุกตัวในเหตุการณ์ E ต้องเป็นสมาชิกในอยู่ในแซมเปิลสเปซ S
   ดังนั้น $0 \leq n(E) \leq n(S)$
2. ถ้า E เป็นเหตุการณใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S จะได้ว่า
   2.1 $0 \leq P(E) \leq 1$
   2.2 ถ้า $P(E)=1$ หมายถึงเหตุการณ์นั้นต้องเกิดขึ้นแน่นอน
   ถ้า $P(E)=0$ หมายถึงเหตุการณ์นั้นต้องไม่เกิด
   2.3 ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ จะได้ว่า $P(S)=1$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จากการทดลองสุ่มต่อไปนี้ จงเขียนแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ที่สนใจในการทดลองนั้นๆ
   (1) ได้หัวสองเหรียญจากการโยนเหรียญสองอันหนึ่งครั้ง
   (2) ได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 2 หรือ 6 จากการโยนลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง
   (3) หยิบได้สลากหมายเลข 5 หรือ 6 หรือ 7 หรือ 8 จากสลาก 10 ใบซึ่งเขียนหมายเลข 1 ถึง 10 กำกับไว้
   (4) ได้นักเรียนที่ถนัดมือซ้ายในห้องเรียนที่ท่านเรียนอยู่
   (5) ได้สลากที่มีรางวัลจากการจับสลากที่ประกอบด้วยสลากที่มีรางวัล 3 ใบ และไม่มีรางวัล 7 ใบ
   (6) ได้คำตอบจากครอบครัว 3 ครอบครัวว่ามีจักรเย็บผ้าใช้ทั้งสามครอบครัว
   (7) ได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก ในการหยิบลูกบอล 3 ลูก จากกล่องซึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 3 ลูก และสีดำ 2 ลูก
   (8) ได้แต้มที่เหมือนกันหรือได้แต้ม 2 จากลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก
   (9) ได้หัวและแต้มที่มากกว่า 4 จากการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญและทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง
   (10) ได้สีที่ชอบคือ สีฟ้าหรือสีชมพูจากการสอบถามนางสาวสุชาดาถึงสีของกระดาษเช็ดหน้าที่ชอบสองสีจากสีทั้งหมด 5 สี คือ ขาว ฟ้า ชมพู เขียว และเหลือง

1. ถ้า $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   $E_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

   $E_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

   $E_3 = \{2, 3, 4, 5\}$

   และ $E_4 = \{1, 6, 7\}$

   จงหาสมาชิกของ S ที่อยู่ในเหตุการณ์ต่อไปนี้

   (1) $E_1 \cup E_3$ (2) $E_1 \cap E_2$

   (3) E'_3 (4) $(E'_3 \cap E_4) \cap E_2$

   (5) $(S \cap E_3)'$ (6) $(E'_1 \cap E'_2) \cap E'_3$

2. จากเหตุการณ์ E_1, E_2, E_3 ในข้อ 2 จงเขียนแผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์แสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $E_1 \cap E'_2$ (3) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$

(2) $(E_1 \cup E_2)'$ (4) $(E'_1 \cap E'_2) \cap E'_3$

3. ในการสำรวจอายุของผู้ป่วยแผนกเด็ก (อายุไม่เกิน 15 ปี) ของโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุตั้งแต่ 1 ถึง 9 ปี

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุน้อยกว่า 5 ปี

และ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุมากกว่า 9 ปี

จงหา (1) $E_1 \cup E_2$ (3) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$

(2) $E_1 \cap E_2$ (4) $E_2 \cup E_3$

4 ในการจับสลาก 1 ใบ จากสลาก 10 ใบ ซึ่งมีเลข 0 ถึง 9 กำกับอยู่ ถ้าสนใจเลขที่เขียนกำกับไว้ในสลากใบที่จับได้ โดยให้

E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคี่

E_3 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะ

E_4 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้ในรูป E_1, E_2, E_3 หรือ E_4 พร้อมทั้งแจกแจงสมาชิกเมื่อ

(1) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่หรือคี่หรือจำนวนเฉพาะ

(2) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะที่หารด้วย 3 ลงตัว

(3) เลขที่เขียนกำกับไว้ไม่เป็นจำนวนคี่ และไม่เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

(4) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่ที่เป็นจำนวนเฉพาะ

4. การนำความน่าจะเป็นไปใช้

การนำความน่าจะเป็นไปใช้ ต้องการให้ผู้ที่ศึกษาทราบว่าเหตุการณ์ต่างๆนั้นมีโอกาสจะเกิดขึ้นมาก หรือน้อยเพียงใด เพื่อช่วยในการประกอบการตัดสินใจ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งเป็น 2 สี 4 ชนิด คือ สีแดง ได้แก่โพแดงกับข้าวหลามตัด สีดำ ได้แก่ โพดำกับดอกจิก แต่ละชนิดมี 13 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบมา 1 ใบแล้วได้โพดำหรือสีแดง

วิธีทำ S = ไพ่ทั้งหมดมี 52 ใบ หยิบมาทีละ 1 ใบจะได้ 52 วิธี

ดังนั้น n(S) = 52

E = ไพ่โพดำมี 13 ใบ และไพ่สีแดงมี 26 ใบ

ดังนั้น n(E) = 13 + 26 = 39

จากสูตร $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่หยิบไพ่ 1 ใบแล้วได้โพดำหรือสีแดง เท่ากับ $\frac{3}{4}$

สรุปได้ว่า ไพ่ 1 ใบ แล้วได้ไพ่โพดำ หรือโพแดงมีโอกาสเกิดขึ้น 75 % ถือว่ามีโอกาสเป็นไปได้สูง

ตัวอย่างที่ 2 ในการหยิบสลาก 1 ใบจากสลาก 10 ใบ ซึ่งมีเลข 0 - 9 กำกับอยู่ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เป็นจำนวนเฉพาะสลากมีเลข 2 เลข 3 เลข 5 เลข 7

วิธีทำ S = สลากมี 10 ใบ หยิบมาทีละ 1 ใบ จึงหยิบได้ 10 วิธี

S = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,}

n(S)=10

E = สลากที่เป็นจำนวนเฉพาะ

E ={2,3,5,7,}

n(E)=4

จากสูตร $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ แทนค่าได้ $P(E) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เป็นจำนวนจำเพาะ เท่ากับ $\frac{2}{5}$

สรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เป็นจำนวนจำเพาะ มีโอกาสเกิดขึ้น 40 % ถือว่ามีโอกาสเกิดขึ้นน้อย

ตัวอย่างที่ 3 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาโอกาสที่ผลรวมของแต้มเป็น 13

วิธีทำ ลูกเต๋า 2 ลูกจะมีผลรวมสูงสุดคือ $6 + 6 = 12$

โจทย์ต้องการทราบผลรวมของแต้มที่จะเป็น 13 จึงเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้

$\therefore$ โอกาสที่ผลรวมของแต้มเป็น 13 เท่ากับ 0

สรุปได้ว่า โอกาสที่จะทอดลูกเต๋า 2 ลูกแล้วผลรวมของแต้มเป็น 13 นั้น ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

แบบฝึกหัดที่ 3

1. ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และสรุปถึงโอกาสที่จะเกิดขึ้นว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด

1) ได้แต้ม 4

2) ได้แต้มคู่

3) ได้แต้มมากกว่า 4

4) ได้แต้มน้อยกว่า 7

5) ได้แต้มมากกว่า 0

6) ได้แต้มมากกว่า 6 หรือเป็นแต้มคี่

7) ได้แต้มมากกว่า 3 และเป็นแต้มคี่

....

....

2. ทอดลูกเต๋า 2 ลูกสองครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 7 ในครั้งแรกและได้แต้มรวมเป็น 10 ในครั้งที่ 2 เท่ากับเท่าใด

....

....

3. ช่างก่อสร้างกลุ่มหนึ่งมี 10 คน ประกอบด้วย ช่างปูน 6 คน และช่างไม้ 4 คน ถ้าต้องการเลือกช่าง 7 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้ช่างปูน 4 คน และช่างไม้ 3 คน เท่ากับเท่าใด

....

....

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟสีแดง 6 หลอดซึ่งเป็นหลอดดี 4 หลอดและหลอดไฟสีน้ำเงิน 4 หลอด ซึ่งเป็นหลอดดี 2 หลอด ในการสุ่มหยิบหลอดไฟครั้งละ 1 หลอด 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกัน และเป็นหลอดดีทั้งสองครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด

....

....

....

5. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และสีขาวจำนวนหนึ่ง โดยที่จำนวนวิธีการหยิบลูกบอล 2 ลูก เป็นลูกบอลสีเหมือนกัน เท่ากับ 9 ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลพร้อมพัน 2 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 2 ลูกเท่ากับเท่าใด

....

....

....

บทที่ 9

การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

สาระสำคัญ

การประกอบอาชีพในสังคมและในกลุ่มประชาคมอาเซียนนั้น มีหลากหลายสาขาอาชีพทั้งในด้านอุตสาหกรรม เกษตรกรรม พณิชยกรรม ความคิดสร้างสรรค์ และการบริหารจัดการ อาชีพในวงการดังกล่าวล้วนมีการใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้าไปเกี่ยวข้องเกือบทุกกลุ่มอาชีพ ซึ่งผู้เรียนสามารถนำความรู้และทักษะที่ได้เรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมาประยุกต์ใช้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. สามารถวิเคราะห์งานอาชีพในสังคมและกลุ่มประชาคมอาเซียนที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์
2. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์กับงานอาชีพได้

ขอบข่ายเนื้อหา

เรื่องที่ 1 ลักษณะ ประเภทของงานอาชีพที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

เรื่องที่ 2 การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับงานอาชีพในสังคมและประชาคมอาเซียน

เรื่องที่ 1 ลักษณะ ประเภทของงานอาชีพที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

1.1 กลุ่มอาชีพเกษตรกรรม ได้แก่ อาชีพ การทำนา ทำไร่ การปลูกผัก การเลี้ยงสัตว์ ประมง ฯลฯ

(1) ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

1. การสำรวจของตลาดที่จะปลูกพืชเกษตรกรรม
2. การเตรียมพื้นที่ดิน ซึ่งขึ้นอยู่กับความกว้าง ความยาวของพื้นที่ว่า ผู้ประกอบการใช้พื้นที่กี่ไร่ กี่งาน กี่ตารางวา ในการทำแปลง ขุดร่อง เพื่อใช้เป็นพื้นที่นา 1 ส่วน พื้นที่ปลูกผัก 1 ส่วน บ่อน้ำ 1 ส่วน การเลี้ยงสัตว์ 1 ส่วน พื้นที่อยู่อาศัย 1 ส่วน เป็นต้น
3. การเตรียมเมล็ดพันธุ์ข้าว ผัก และพืชพันธุ์อื่น ๆ
4. การเตรียมปุ๋ยว่าใช้ขนาดกี่กิโลกรัมต่อไร่
5. การรดน้ำ พรวนดิน ซึ่งต้องกำหนดว่า รดน้ำวันละ 2 ครั้ง ในปริมาณมากน้อยเท่าไร
6. การฉีดยาฆ่าแมลงโดยใช้สารกำจัดศัตรูพืชทางชีวภาพ เช่น สะเดา และสมุนไพรอื่น ๆ เป็นต้น ใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วน สัดส่วน เพื่อผสมยากำจัดศัตรูพืชกับน้ำก่อนฉีดพ่น
7. การเก็บเกี่ยวผลผลิต ซึ่งต้องใช้ทักษะการคำนวณระยะเวลาตั้งแต่การปลูกจนถึงระยะการเก็บเกี่ยวผลผลิต
   - การตรวจสอบความชื้นของวัสดุและสถานที่เก็บผลผลิต

- การคำนวณพื้นที่ในการเก็บรักษาผลผลิต

8. การจำหน่ายผลผลิต ซึ่งต้องใช้ทักษะการจัดทำบัญชีรับ – จ่าย การจดบันทึกจำนวนผลผลิตที่ได้
9. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

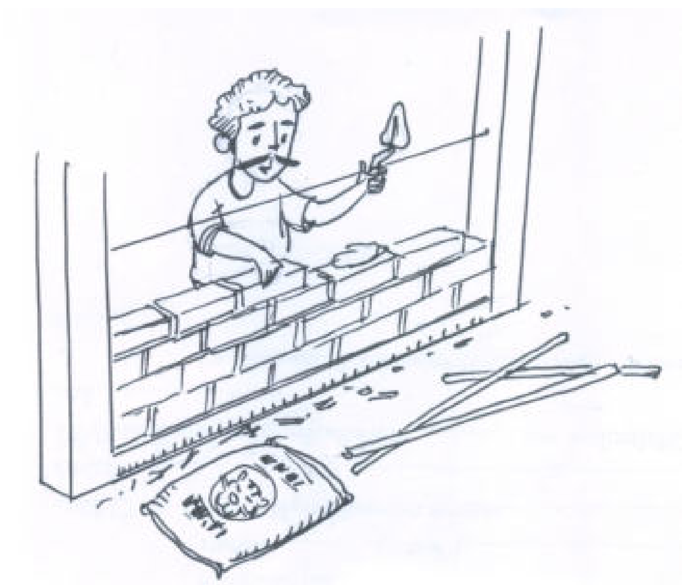
(2) เครื่องมือและเทคโนโลยีที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. สมุดบันทึกรายรับ รายจ่ายหรือคอมพิวเตอร์โน๊ตบุ๊ค
3. สมุดจดบันทึกระยะเวลาการเจริญเติบโตตั้งแต่การปลูกจนถึง การเก็บเกี่ยวผลผลิต

(3) ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. การวัดความยาว การหาพื้นที่
2. อัตราส่วนในการผสมปุ๋ยต่อความกว้างความยาวของพื้นที่ดิน
3. การชั่งผลผลิตที่ได้
4. การกำหนดราคาขายต่อกิโลกรัม
5. การบวก ลบ คูณ หาร เรื่อง ค่าจ้างแรงงานและอื่น ๆ
6. การทำบัญชีรายรับ รายจ่ายประจำวัน
7. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.2 กลุ่มอาชีพอุตสาหกรรม ได้แก่ อาชีพพนักงานในโรงงานอุตสาหกรรมต่างๆ ได้แก่ อุตสาหกรรมห้องเย็น ถ้วยชามอุปกรณ์เซรามิค ผ้าขนหนู กระดาษและสิ่งพิมพ์ สแตนเลส เหล็ก พลาสติก ปูนซีเมนต์ ฯลฯ



(1) ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การคำนวณเงินรายได้ประจำวัน
2. การคำนวณเงินค่าทำงานล่วงเวลา
3. การคำนวณเงินกู้และดอกเบี้ยคงที่หรือดอกเบี้ยทบต้น
4. การทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวัน
5. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
6. การสำรวจและวิจัยการตลาด
7. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

(2) เครื่องมือและเทคโนโลยีที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. เครื่องจักรอุตสาหกรรมในแต่ละสาขาอุตสาหกรรม
4. เครื่องบรรจุภัณฑ์ลงกล่องหรือแพ็คเป็นพลาสติกห่อหุ้ม

(3) ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. การคำนวณเงินรายได้ประจำสัปดาห์ ประจำเดือนโดยหักวันลาหยุด
2. การคำนวณเงินค่าทำงานล่วงเวลาเป็นจำนวนชั่วโมงต่อค่าจ้างรายชั่วโมง
3. การคำนวณเงินกู้และดอกเบี้ย (ดอกเบี้ยคงที่, ดอกเบี้ยทบต้น)
4. การทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
5. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.3 กลุ่มอาชีพพาณิชยกรรม ได้แก่ อาชีพค้าขาย ผู้ประกอบการร้านอาหารและเครื่องดื่ม ผู้ประกอบการขายปลีกและขายส่ง ธุรกิจการซื้อขายอสังหาริมทรัพย์ ธุรกิจการซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ อาชีพการทำบัญชี การตลาด เป็นต้น

(1) ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การจัดเตรียมสถานที่ การคำนวณการจัดวางโต๊ะ เก้าอี้ หรือวัสดุอุปกรณ์ในการขาย
2. การจัดซื้อวัตถุดิบในการค้าขายปลีกหรือขายส่ง
3. การจำหน่ายสินค้า การคำนวณราคาสินค้าต่อหน่วย การทอนเงิน
4. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
5. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
6. การฝากเงิน การถอนเงิน การออมเงิน
7. การประชาสัมพันธ์ในงานธุรกิจค้าขายหรือพาณิชยกรรม ซึ่งต้องใช้ทักษะในการคำนวณขนาดของป้ายโฆษณา ขนาดตัวอักษร ขนาดและจำนวนแผ่นพับหรือใบปลิวโฆษณา
8. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

(2) เครื่องมือและเทคโนโลยีที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. เครื่องเก็บเงิน – ทอนเงิน
3. เครื่องคอมพิวเตอร์
4. เครื่องไมโครเวฟ
5. เครื่องปั่นน้ำผลไม้

(3) ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. การคำนวณขนาดของพื้นที่ใช้สอยเพื่อจัดวาง โต๊ะ เก้าอี้หรือวัสดุ อุปกรณ์ในการขาย
2. การคำนวณปริมาณการจัดซื้อวัตถุดิบในแต่ละวัน
3. การคำนวณในการจัดซื้อพัสดุ
4. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
5. การคำนวณขนาดของป้ายโฆษณา ประชาสัมพันธ์หรือแผ่นพับ แผ่นปลิวโฆษณา
6. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.4 กลุ่มอาชีพด้านความคิดสร้างสรรค์ ได้แก่ ธุรกิจโฆษณา ธุรกิจการออกแบบตกแต่งที่อยู่อาศัย สำนักงานและสวนหย่อม การจัดดอกไม้และแจกันประดับ ธุรกิจการทำพวงหรีด การจัดกระเช้าของขวัญ เป็นต้น

(1) ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การจัดเตรียมขนาด ปริมาตร รูปทรงของพื้นที่หรือชิ้นงานในการจัดทำธุรกิจ ซึ่งต้องใช้การวัดความกว้าง ความยาว ความสูงของพื้นที่หรือชิ้นงาน การออกแบบรูปทรงโดยใช้รูปเรขาคณิตสามมิติ
2. การคำนวณปริมาณของวัสดุอุปกรณ์ในการใช้ประดิษฐ์สร้างสรรค์ชิ้นงาน หรือการจัดตกแต่งสวนหย่อม
3. การคำนวณเพื่อกำหนดราคาขายสินค้า
4. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
5. การจัดทำบัญชีรับ – จ่าย ประจำวัน
6. การประชาสัมพันธ์ในอาชีพธุรกิจทุกประเภท ซึ่งต้องใช้ทักษะในการคำนวณเป็นพื้นฐานในการจัดทำแผ่นป้ายประชาสัมพันธ์หรือแผ่นพับ แผ่นปลิว
7. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

(2) เครื่องมือและเทคโนโลยีที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. โปรแกรมสำเร็จรูปในการออกแบบสินค้า

(3) ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. การคำนวณพื้นที่ผิว ปริมาตรของพื้นที่หรือออกแบบรูปทรงที่ใช้ในการทำงานอาชีพ
2. การคำนวณปริมาณของวัสดุ อุปกรณ์ที่ใช้ประดิษฐ์ สร้างสรรค์ ชิ้นงาน
3. การคำนวณต้นทุนและกำไร เพื่อกำหนดราคาขายสินค้า
4. การจัดทำบัญชีพัสดุ (การจัดซื้อ การเบิกจ่ายพัสดุ)
5. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
6. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

1.5 กลุ่มอาชีพบริหารจัดการและการบริการ ได้แก่ อาชีพกลุ่มงานบริการและการท่องเที่ยว งานบริการรักษาความปลอดภัย บริการดูแลทารกและเด็ก บริการดูแลผู้สูงอายุ บริการสันทนาการและการกีฬา เป็นต้น

(1) ลักษณะงานเบื้องต้นที่ใช้ทักษะคณิตศาสตร์

1. การสำรวจพื้นที่ในการให้บริการ การคำนวณระยะทางในการให้บริการ
2. การจัดซื้อวัสดุ อุปกรณ์ในการให้บริการ
3. การรับสมัครและกำหนดเงินเดือนตามตำแหน่งงานของเจ้าหน้าที่ในการให้บริการ
4. การจัดทำตารางเวลา การอยู่เวร - ยามของเจ้าหน้าที่ประจำสำนักงาน
5. การจัดทำกำหนดการท่องเที่ยวและการให้บริการ รวมทั้งกำหนดราคาขายบริการในแต่ละพื้นที่
6. การคำนวณการใช้น้ำมันเชื้อเพลิงของยานพาหนะที่ให้บริการ
7. การจัดทำบัญชีพัสดุ และการเบิกจ่ายพัสดุ
8. การจัดทำบัญชีรับ – จ่ายประจำวัน
9. การจัดทำแผ่นป้ายโฆษณา ประชาสัมพันธ์การให้บริการ
10. การจัดทำสรุปรายงานและการนำเสนอข้อมูล
11. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

(2) เครื่องมือและเทคโนโลยีที่ใช้

1. เครื่องคิดเลข
2. เครื่องคอมพิวเตอร์
3. เครื่องออกกำลังกาย
4. อุปกรณ์ในการเตรียมอาหาร น้ำดื่ม นมแก่ทารกเด็กและผู้สูงอายุ
5. ยานพาหนะในการให้บริการ
6. แผนที่ของสถานที่หรือจุดที่ให้บริการ

(3) ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. การคำนวณพื้นที่และการวัดระยะทาง
2. การคำนวณปริมาณของวัสดุ อุปกรณ์ที่จำเป็นต้องจัดซื้อ จัดหาเพื่อให้บริการ
3. การคำนวณเงินเดือนและกำหนดตำแหน่งงานของเจ้าหน้าที่
4. การจัดทำตารางการปฏิบัติงาน
5. การคำนวณการใช้เชื้อเพลิงรถยนต์ต่อระยะทางที่ให้บริการ
6. การจัดทำบัญชีเบื้องต้น
7. การใช้สถิติในการจัดทำสรุปรายงานหรือนำเสนอข้อมูล
8. การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

เรื่องที่ 2 การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับงานอาชีพในสังคมและประชาคมอาเซียน

ในการนำความรู้คณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับงานอาชีพทั้ง 5 กลุ่มงานอาชีพทั้งกลุ่มงานอาชีพเกษตรกรรม กลุ่มงานอาชีพอุตสาหกรรม กลุ่มงานอาชีพพาณิชยกรรม กลุ่มงานอาชีพความคิดสร้างสรรค์และกลุ่มงานอาชีพด้านบริหารจัดการและบริการที่ต้องนำทักษะความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ทุกกลุ่มอาชีพ เช่น การจัดทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวัน ประจำเดือน การคำนวณเงินค่าจ้าง การคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เป็นต้น กลุ่มอาชีพทุกกลุ่มอาชีพอาจจะใช้ทักษะความรู้คณิตศาสตร์ต่างกันออกไป ดังนั้น ในบทนี้จะนำเสนอตัวอย่างที่เป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กันมากเท่านั้น

2.1 ทักษะการจัดทำบัญชีรับ - จ่ายประจำวัน

ตัวอย่างที่ 1 การจัดทำบัญชีรายรับ – รายจ่ายประจำวันของเกษตรกรปลูกผัก

วันที่ 10 ตุลาคม 2554	จ่ายค่าเมล็ดพันธุ์และปุ๋ย 2,000 บาท ค่าน้ำ ค่าไฟ 480 บาท
	จ่ายค่าอาหาร 200 บาท ได้รับเงินจากการขายผัก 1,500 บาท
วันที่ 12 ตุลาคม 2554	จ่ายค่าอาหาร 280 บาท จ่ายค่าโทรศัพท์ 590 บาท
	จ่ายค่าน้ำมันรถยนต์ 1,100 บาท ได้รับเงินจากการขายผัก 3,600 บาท
วันที่ 15 ตุลาคม 2554	จ่ายค่าหนังสือ 300 บาท จ่ายค่าอาหาร 500 บาท จ่ายค่าน้ำดื่ม 250 บาท
	จ่ายค่าเสื้อผ้า 1,800 บาท ได้รับเงินจากการขายผัก 2,200 บาท
วันที่ 16 ตุลาคม 2554	จ่ายค่าอาหาร 300 บาท จ่ายค่าบัตรชมภาพยนตร์ 400 บาท
	จ่ายค่าถุงพลาติก 480 บาท ได้รับเงินจากการขายผัก 3,000 บาท

วัน เดือน ปี	รายการรับ	จำนวนเงิน		วัน เดือน ปี	รายการจ่าย	จำนวนเงิน	
		บาท	สต.			บาท	สต.
10 ต.ค. 54	รับเงินจากการขายผัก	1,500	-	10 ต.ค. 54	ค่าเมล็ดพันธุ์และปุ๋ย	2,000	-
					ค่าน้ำ ค่าไฟฟ้า	480	-
					ค่าอาหาร	200	-
12 ต.ค. 54	รับเงินจากการขายผัก	3,600	-	12 ต.ค. 54	ค่าอาหาร	280	-
					ค่าโทรศัพท์	590	-
					ค่าน้ำมันรถยนต์	1,100	-
15 ต.ค. 54	รับเงินจากการขายผัก	2,200	-	15 ต.ค. 54	ค่าหนังสือ	300	-
					ค่าอาหาร	500	-
					ค่าน้ำดื่ม	250	-
					ค่าเสื้อผ้า	1,800	-
16 ต.ค. 54	รับเงินจากการขายผัก	3,000	-	16 ต.ค. 54	ค่าอาหาร	300	-
					ค่าบัตรชมภาพยนตร์	400	-
					ค่าถุงพลาสติก	480	-
	รวม	10,300	-		รวม	8,680	-
					ยอดคงเหลือยกไป	1,620	-

2.2 ทักษะการคำนวณเงินค่าจ้าง

ตัวอย่างที่ 2 พเยาว์เป็นพนักงานทำความสะอาดของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดเวลาทำงานวันจันทร์ถึงวันเสาร์ได้รับค่าจ้างเป็นรายวัน ๆ ละ 320 บาท พเยาว์มีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามประเพณีและวันหยุดพักผ่อนประจำปีโดยไม่ต้องทำงาน ในเดือนตุลาคม พเยาว์มาทำงานทุกวันในวันทำงานตามเวลาทำงานปกติ และวันที่ 1 ตุลาคมตรงกับวันจันทร์ในเดือนนี้มีวันหยุดตามประเพณี 1 วัน คือ วันที่ 23 ตุลาคม อยากทราบว่าในเดือนนี้พเยาว์ได้รับค่าจ้างเท่าไร

วิธีทำ

เดือนตุลาคม						
อาทิตย์	**จันทร์**	**อังคาร**	**พุธ**	**พฤหัส**	**ศุกร์**	**เสาร์**
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

เดือนตุลาคม พเยาว์ได้รับค่าจ้างในวันทำงาน 26 วัน และมีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามประเพณี 1 วัน และได้รับค่าจ้างวันละ 320 บาท

ดังนั้น พเยาว์ได้รับค่าจ้างในเดือนตุลาคม $= (26 + 1) \times 320$

$= 8{,}640$ บาท

2.3 ทักษะการคำนวณเงินค่านายหน้าและเงินปันผล

ตัวอย่างที่ 3 นายสัญชัยเป็นตัวแทนขายเครื่องไฟฟ้า ซึ่งมีราคา 4,500 บาทให้กับบริษัทแห่งหนึ่ง บริษัทคิดค่านายหน้า 10% อยากทราบว่า สัญชัยต้องส่งเงินให้บริษัทเท่าไร

วิธีทำ บำเหน็จตัวแทนในการขาย $= \frac{10}{100} \times 4{,}500 = 450$ บาท

ดังนั้น สัญชัยต้องส่งเงินให้บริษัท $= 4{,}500 - 450 = 4{,}050$ บาท

ตัวอย่างที่ 4 ภัทรามีหุ้นปุริมสิทธิของบริษัทจำหน่ายเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่ง จำนวน 150 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 100 บาท อัตราเงินปันผล 10% สิ้นปีเขาจะได้รับเงินปันผลทั้งสิ้นเท่าไร

วิธีทำ เงินปันผลต่อหุ้นของหุ้นปุริมสิทธิ = อัตราเงินปันผล $\times$ มูลค่าหุ้นปุริมสิทธิ

$= 10\% \times 100$

$= \frac{10}{100} \times 100$

$= 10$ บาท

ภัทรามีหุ้นปุริมสิทธิจำนวน 150 หุ้น

ดังนั้น ภัทราจะได้รับเงินปันผลทั้งสิ้น $= 150 \times 10$

$= 1{,}500$ บาท

2.4 ทักษะการใช้สถิติในการสรุปรายงานหรือนำเสนอข้อมูล

ตัวอย่างที่ 4 การสรุปรายงานการดำเนินงานโครงการอบรมคอมพิวเตอร์สำหรับพนักงาน

ผลการดำเนินงาน

บริษัทน้ำมันแห่งหนึ่งได้จัดทำโครงการอบรมคอมพิวเตอร์สำหรับพนักงาน โดยดำเนินการเป็น 3 รุ่น ดังนี้

รุ่นที่	โปรแกรมอบรม	วันที่อบรม	จำนวนผู้เข้าอบรม
1	การใช้โปรแกรมไมโครซอฟท์ Excel	5 – 9 ก.ย. 54	10
2	การใช้โปรแกรม PhotoShop	12 – 16 ก.ย. 54	10
3	การใช้โปรแกรมไมโครซอฟท์ Access	19 – 23 ก.ย. 54	10

เมื่อดำเนินการอบรมและมีการประเมินผลการอบรมโดยผู้จัดการอบรมได้ดำเนินการทดสอบความรู้ ความเข้าใจแก่พนักงาน โดยใช้แบบทดสอบก่อนและหลังการอบรม เพื่อตรวจสอบความก้าวหน้าว่า ภายหลังการอบรมพนักงานได้รับความรู้เพิ่มขึ้นจากช่วงก่อนเข้ารับการอบรมมากน้อยเพียงใด โดยพิจารณาจากคะแนนเฉลี่ยของผู้เข้ารับการอบรมในแต่ละรุ่น ซึ่งสรุปขั้นตอนการคำนวณและผลการดำเนินการได้ดังนี้

1. นำแบบทดสอบวัดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาการอบรมให้ผู้เข้าอบรมทั้ง 10 คน ตรวจให้คะแนนของผู้เข้าอบรมแต่ละคนว่าได้คนละกี่คะแนน ซึ่งแต่ละรุ่น แบบทดสอบจะมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน เท่ากันทั้ง 3 รุ่น แล้วนำมากรอกคะแนนเป็นรายบุคคลตั้งแต่คนที่ 1 – 10 ลงในแบบบันทึกคะแนน เพื่อคำนวณค่าเฉลี่ยของคะแนน $(\bar{x})$ ในแต่ละรุ่น ดังนี้

คนที่	คะแนนก่อนการอบรม (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)			คะแนนหลังการอบรม (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)		
	โปรแกรมรุ่นที่ 1	โปรแกรมรุ่นที่ 2	โปรแกรมรุ่นที่ 3	โปรแกรมรุ่นที่ 1	โปรแกรมรุ่นที่ 2	โปรแกรมรุ่นที่ 3
1	8	9	7	15	14	14
2	7	6	8	14	13	13
3	9	5	9	17	12	15
4	10	7	8	16	15	12
5	7	5	7	15	11	16
6	8	8	6	14	13	14
7	6	7	10	16	12	13

8	11	10	9	18	14	15
9	9	6	8	13	12	13
10	10	5	7	14	13	12
คะแนนรวมของทั้ง 10 คน	85	68	79	152	129	137
คำนวณคะแนนเฉลี่ยโดยนำคะแนนรวมหารด้วยจำนวนคนทั้งหมด คือ 10 คน	$(\overline{X}) = 85 \div 10 = 8.5$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 8.5 คะแนน	$(\overline{X}) = 68 \div 10 = 6.8$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 6.8 คะแนน	$(\overline{X}) = 79 \div 10 = 7.9$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 7.9 คะแนน	$(\overline{X}) = 152 \div 10 = 15.2$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 15.2 คะแนน	$(\overline{X}) = 129 \div 10 = 12.9$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 12.9 คะแนน	$(\overline{X}) = 137 \div 10 = 13.7$ ∴ คะแนนเฉลี่ย = 13.7 คะแนน
คำนวณร้อยละของคะแนนเต็ม 20 คะแนน	$= \frac{8.5 \times 100}{20}$ = 42.50 %	$= \frac{6.8 \times 100}{20}$ = 34.00 %	$= \frac{7.9 \times 100}{20}$ = 39.50 %	$= \frac{15.2 \times 100}{20}$ = 76.00 %	$= \frac{12.9 \times 100}{20}$ = 64.50 %	$= \frac{13.7 \times 100}{20}$ = 68.50 %

2. นำคะแนนเฉลี่ยที่คำนวณได้และผลการคำนวณว่า คะแนนเฉลี่ยนั้นคิดเป็นร้อยละเท่าไรของคะแนนเต็ม จากข้อ 1 มากรอกลงในตารางสรุปรายงาน ดังนี้

โปรแกรมการอบรม	**คะแนนเฉลี่ย ($\overline{x}$) จากคะแนนเต็ม 20 คะแนน**		**คะแนนเฉลี่ย ($\overline{x}$) จากคะแนนเต็ม 20 คะแนน**	
	ก่อนการอบรม	**คิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม**	**หลังการอบรม**	**คิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม**
รุ่นที่ 1 การใช้โปรแกรมไมโครซอฟท์ Excel	8.50	42.50	15.20	76.00
รุ่นที่ 2 การใช้โปรแกรม PhotoShop	6.80	34.00	12.90	64.50
รุ่นที่ 3 การใช้โปรแกรมไมโครซอฟท์ Access	7.90	39.50	13.70	68.50

จากตาราง พบว่า เมื่อพิจารณาจากคะแนนเฉลี่ยของผู้เข้ารับการอบรมหลังการอบรมทั้ง 3 รุ่น จะเห็นได้ว่า มีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นจากคะแนนเฉลี่ยก่อนการอบรมทุกรุ่น กล่าวคือ แสดงว่า ผู้เข้ารับการอบรมส่วนใหญ่ได้รับความรู้ ความเข้าใจเพิ่มมากขึ้นในเนื้อหาที่บริษัทได้จัดอบรมให้พนักงาน และพบว่า รุ่นที่ 1 ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด คือ ได้คะแนนเฉลี่ย 15.20 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 76.00 ของคะแนนเต็ม รองลงมา คือ รุ่นที่ 3 ได้คะแนนเฉลี่ย 13.70 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 68.50 ของคะแนนเต็ม ส่วนรุ่นที่ 2 นั้น ได้คะแนนเฉลี่ยน้อยที่สุด คือ ได้คะแนนเฉลี่ย 12.90 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 64.50 ของคะแนนเต็ม

2.5 ทักษะการคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

ตัวอย่าง นายโชคได้รับเงินเดือน ๆ ละ 28,000 บาท สิ้นปีสามารถหักค่าใช้จ่ายได้ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท หักค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท หักค่าเบี้ยประกันชีวิต 25,000 บาท หักดอกเบี้ยเงินกู้ยืมเพื่อซื้อบ้าน 36,450 บาท สิ้นปีนายโชคยื่นแบบแสดงรายการภาษีเงินได้บุคคลธรรมต้องชำระภาษีหรือไม่ ถ้าชำระต้องชำระภาษีเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ

เงินได้พึงประเมินของนายโชค = 28,000 $\times$ 12 = 336,000 บาท

หัก ค่าใช้จ่าย ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท

ค่าใช้จ่าย $\frac{40}{100}\times 336{,}000 = 134{,}400$ บาท

แต่ค่าใช้จ่ายของนายโชคคำนวณได้ 134,400 บาท แต่สามารถหักได้แค่ 60,000 บาทเท่านั้น

หัก ค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท

ค่าเบี้ยประกันชีวิต 25,000 บาท

ดอกเบี้ยเงินกู้ยืมเพื่อซื้อบ้าน 36,450 บาท

รวมหักค่าลดหย่อนได้ = 30,000 + 25,000 + 36,450 = 91,450 บาท

เงินได้สุทธิของนายโชค = เงินได้พึงประเมิน – (ค่าใช้จ่าย + หักค่าลดหย่อน)

= 336,000 – (60,000 + 91,450)

= 184,550 บาท

ตามตารางอัตราการเสียภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เงินได้สุทธิ 0 – 150,000 บาท ไม่ต้องเสียภาษี ส่วนที่เกิน 150,000 – 500,000 บาท เสียภาษี 10%

นายโชคมีเงินได้สุทธิที่ต้องเสียภาษี = 184,550 – 150,000 =34,550 บาท

$= 34{,}550 \times \frac{10}{100} = 3{,}455$ บาท

$\therefore$ นายโชคเสียภาษี 3,455 บาท

ตารางอัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา								
ขั้นเงินได้สุทธิตั้งแต่	**เงินได้สุทธิจำนวนสูงสุดของขั้น**	**เงินได้สุทธิแต่ละขั้น**		**อัตราภาษีร้อยละ**	**ภาษีเงินได้**		**ภาษีในแต่ละขั้นเงินได้**	**ภาษีสะสมสูงสุดของขั้น**
0 ถึง 100,000	100,000	....	....	5	....	....	ยกเว้น	0
เกิน 100,000 ถึง 150,000	50,000	....	....	10	....	....	ยกเว้น	0
เกิน 150,000 ถึง 500,000	350,000	....	....	10	....	....	35,000	35,000
เกิน 500,000 ถึง 1,000,000	500,000	....	…	20	....	…	100,000	135,000
เกิน 1,000,000 ถึง 4,000,000	3,000,000	....	…	30	....	…	900,000	1,035,000
เกิน 4,000,000 บาทขึ้นไป		....	…	37	....	…		
รวม	$\rightarrow$							

2.6 การคำนวณในการจัดทำแผ่นป้ายโฆษณาเพื่อประชาสัมพันธ์การให้บริการ

ตัวอย่าง ทำแผ่นโฆษณาเชิญชวนการท่องเที่ยวในจังหวัด โดยมีขนาดแผ่นโฆษณาที่ทำด้วยแผ่นไวนิล มีขนาดกว้าง 1.2 เมตร ยาว 1.5 เมตร ทางร้านคิดค่าออกแบบ 400 บาท ค่าจัดทำตารางเมตรละ 250 บาท จะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าไร

วิธีทำ พื้นที่แผ่นไวนิลที่ใช้โฆษณา = กว้าง $\times$ ยาว

= 1.2 $\times$ 1.5 = 1.8 ตารางเมตร

ค่าจัดทำ = 1.8 $\times$ 250 = 450 บาท

$\therefore$ จะต้องจ่ายเงินทั้งหมด = ค่าจัดทำ + ค่าออกแบบ

= 450 + 400 = 850 บาท

แบบฝึกหัดที่ 1

1. ศุภางค์เป็นพนักงานของโรงงานเย็บเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดเวลาทำงานตามปกติวันละ 8 ชั่วโมง ได้รับเงินเดือน ๆ ละ 9,000 บาท จงหาว่า ศุภางค์มีรายได้วันละเท่าไร และศุภางค์มีรายได้ชั่วโมงละเท่าไร

2. สุภาพเป็นพนักงานของโรงงานผลิตเครื่องปรับอากาศแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดเวลาทำงานวันจันทร์ถึงวันศุกร์ได้รับค่าจ้างเป็นรายวัน ๆ ละ 370 บาท สุภาพมีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามประเพณีและวันหยุดพักผ่อนประจำปีโดยไม่ต้องทำงานในเดือนธันวาคม สุภาพมาทำงานทุกวันในวันทำงานตามเวลาทำงานปกติและวันที่ 1 ธันวาคม ตรงกับวันอาทิตย์ในเดือนนี้มีวันหยุดตามประเพณี 3 วัน คือ วันที่ 5, 10 และ 31 จงหาว่าในเดือนธันวาคมนี้ สุภาพได้รับค่าจ้างเท่าไร

3. ธิดาเป็นพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดเวลาทำงานวันจันทร์ถึงวันศุกร์ เวลาทำงานปกติตั้งแต่ เวลา 08.00 – 17.00 น. หยุดพักระหว่างเวลา 12.00 – 13.00 น. ธิดามีรายได้เดือนละ 12,000 บาท ในเดือนสิงหาคม วันที่ 1 ตรงกับวันจันทร์และในเดือนนี้มีวันหยุดตามประเพณี 1 วัน คือ วันที่ 12 สิงหาคม ธิดามีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดทุกประเภทโดยไม่ต้องทำงาน ในเดือนนี้ธิดามาทำงาน ทุกวัน ทำงานตามเวลาทำงานปกติ ถ้านายจ้างให้ธิดามาทำงานในวันหยุดตามประเพณี 1 วัน ได้รับ ค่าจ้างอีก 1 เท่า และทำงานในวันเสาร์ได้รับค่าจ้างเพิ่มเป็น 2 เท่าของค่าจ้างปกติอีก 4 วัน ระหว่าง เวลา 09.00 – 12.00 น. จงหาค่าทำงานในวันหยุดทั้งหมดและรายได้ทั้งหมดของธิดาในเดือนสิงหาคมนี้

4. จงทำบัญชีรายรับ – จ่ายของตัวเองใน 1 สัปดาห์

บัญชีรายรับ – จ่ายของ ....

วัน เดือน ปี	รายการรับ	จำนวนเงิน		วัน เดือน ปี	รายการจ่าย	จำนวนเงิน	
		บาท	สต.			บาท	สต.

5. นางอัญชลีเป็นตัวแทนขายเครื่องครัวที่มีราคา 45,000 บาท ให้กับบริษัทแห่งหนึ่ง บริษัทคิดค่านายหน้า 30% อยากทราบว่านางอัญชลีได้เงินค่านายหน้าเท่าไร

6. พจมานถือหุ้นบุริมสิทธิของบริษัทผลิตกระเบื้องแห่งหนึ่ง จำนวน 1,500 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 160 บาท อัตราเงินปันผล 5% เมื่อสิ้นปีพจมานจะได้เงินปันผลทั้งหมดเท่าไร

7. สุภัทราเป็นพนักงานบริษัทผลิตแชมพูสระผมแห่งหนึ่งได้รับมอบหมายจากบริษัทให้ทำการสำรวจ ความนิยมของสีขวดที่ใช้บรรจุแชมพูสำหรับกลุ่มเป้าหมายวัยรุ่น จำนวน 50 คน สุภัทราจะดำเนินการอย่างไรตั้งแต่การสำรวจจนถึงการนำเสนอข้อมูล

8. ศักดิ์มีรายได้เดือนละ 25,000 บาท สิ้นปีสามารถหักค่าใช้จ่ายได้ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 60,000 บาท สามารถหักค่าลดหย่อนผู้มีเงินได้ 30,000 บาท หักค่าเบี้ยประกันชีวิต 50,000 บาท หักค่าเบี้ยประกันสุขภาพของมารดาของนายศักดิ์ 20,000 บาท สิ้นปีนายศักดิ์ยื่นแบบแสดงรายการภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาต้องชำระภาษีหรือไม่ ถ้าชำระภาษีเป็นเงินเท่าไร

9. แผ่นไวนิลโฆษณาเชิญชวนการบริจาคช่วยเหลือผู้ประสบภัย มีขนาดกว้าง 0.90 เมตร ยาว 1.8 เมตร ทางร้านคิดค่าออกแบบ 500 บาท ค่าจัดทำตารางเมตรละ 250 บาท จะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าไร

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลย บทที่ 1

ระบบจำนวนจริง

แบบฝึกหัดที่ 1

1.จำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้จำนวนใดเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

ข้อ	จำนวนจริง	จำนวนนับ	จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ
1	$-9,-\frac{7}{2},5\frac{2}{3},\sqrt{2},0,1$	1	0, 1, -9	-9, $\frac{-7}{2}$,$5\frac{2}{3}$,0 ,1	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{5},-7\frac{7}{3},3,12,\frac{5}{4}$	3 , 12	3, 12	$-7\frac{7}{3}$,3 ,12 ,$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$
3	2.01,0.666...,-13		-13	2.01, 0.666, …,-13	
4	2.3030030003...				2.3030030003...
5	$-\pi,-\frac{1}{3},\frac{6}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},-7.5$		$\frac{6}{3}$, -7, 5	$\frac{-1}{3},\frac{6}{3}$,-7.5	$-\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	$25,-17,-\frac{12}{5},\sqrt{9},3,12,\frac{1}{2}\pi$	25, 3 , 12	25, -17, 3 12, $\sqrt{9}$	25, -17, $\frac{-12}{5}$ $\sqrt{9}$, 3, 12	$\frac{1}{2}\pi$

2. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) จริง
2) จริง
3) เท็จ
4) จริง
5) จริง
6) เท็จ

แบบฝึกหัดที่ 2

1. ให้ผู้เรียนเติมช่องว่างโดยใช้สมบัติการเท่ากัน

9. ถ้า a = b แล้ว a +5 = b + 5

10. ถ้า a = b แล้ว -3a = -3b

11. ถ้า a + 4 = b + 4 แล้ว a = b

12. ถ้า a +1 = b +2 และ b + 2 = c - 5 แล้ว a +1 = c + 5

13. ถ้า $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ แล้ว $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

14. ถ้า $x = \frac{3}{2}y$ แล้ว 2x = 3y

15. ถ้า $x^2 + 1 = 2x$ แล้ว $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

16. ถ้า $ab = a + b$ แล้ว $\frac{1}{2}(ab) = \frac{1}{2}(a+b)$

2. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ จงบอกว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงตามสมบัติใด

1) 3 + 5 = 5 + 3	สมบัติการสลับที่ของการบวก
2) (1+2)+3 = 1+(2+3)	สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก
3) (-9)+5 = 5 +(-9)	สมบัติการสลับที่ของการบวก
4) (8 × 9) เป็นจำนวนจริง	สมบัติปิดของการคูณ
5) 5 × 3 = 15 = 3 × 5	สมบัติการสลับที่ของการคูณ
6) 2(a+b) = 2a +2b	การแจกแจง
7) (a + b) + c = a+(b + c)	สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก
8) 9a +2a = 11 a = 2a + 9a	สมบัติการสลับที่ของการบวก
9) 4 × (5 + 6) = (4 × 5) + (4 × 6)	การแจกแจง
10) c(a +b) = ac +bc	การแจกแจง

3 . เซตที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีหรือไม่มีสมบัติปิดของการบวกหรือสมบัติปิดของการคูณ

1) { 1 , 3 , 5 }	มีสมบัติปิดการบวก, การคูณ
2) { 0 }	มีสมบัติปิดการบวก
3) เซตของจำนวนจริง	มี
4) เซตของจำนวนตรรกยะ	มี
5) เซตของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว	มี

4. จงหาอินเวอร์สการบวกของจำนวนในแต่ละข้อ

1) อินเวอร์สการบวกของ 8 คือ -8

2) อินเวอร์สการบวกของ - 5 คือ 5

3) อินเวอร์สการบวกของ - 0.567 คือ 0.567

4) อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

5) อินเวอร์สการคูณของ $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ คือ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. ให้ผู้เรียนบอกสมบัติการไม่เท่ากัน (เมื่อตัวแปรเป็นจำนวนจริงใดๆ)

9. ถ้า $x < 3$ แล้ว $2x < 6$ สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากับที่ไม่เท่ากับศูนย์

10. ถ้า $y > 7$ แล้ว $-2y$ -14 สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากับที่ไม่เท่ากับศูนย์

11. ถ้า $x+1 > 6$ แล้ว $x+2 > 7$ สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

12. ถ้า $y+3 < 5$ แล้ว $y < 2$ สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

13. ถ้า $x < 7$ และ $7 < y$ แล้ว $x < y$ สมบัติการถ่ายทอด

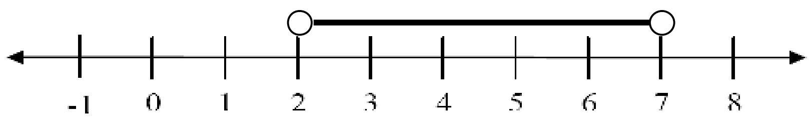
14. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a+1 > 0+1$ สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

15. ถ้า $b < 0$ แล้ว $b + (-2) < 0+(-2)$ สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

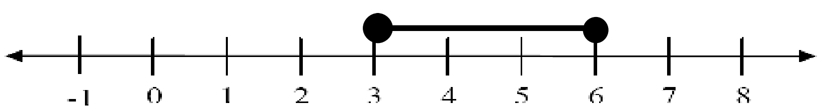
16. ถ้า $c > -2$ แล้ว $(-1)c < (-1)(-2)$ สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากันที่ไม่เท่ากับศูนย์

2. จงใช้เส้นจำนวนแสดงลักษณะของช่วงของจำนวนจริงต่อไปนี้

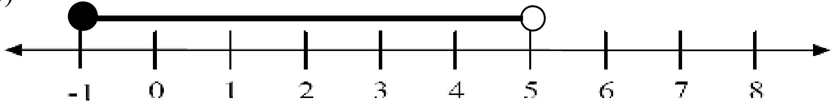
1) (2,7)



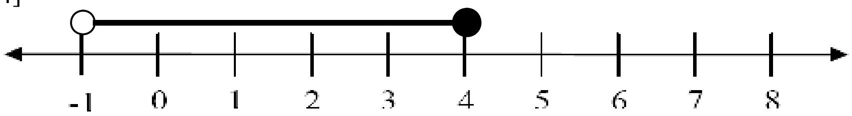
2) [3,6]



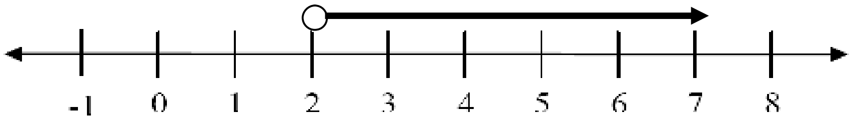
3) [-1,5)



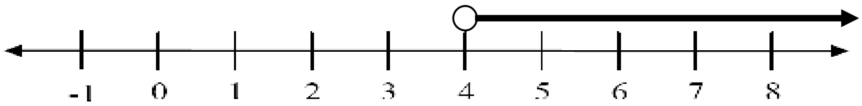
4) (-1,4]



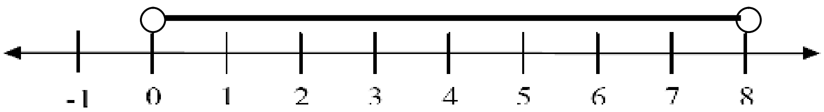
5) (2, ∞)



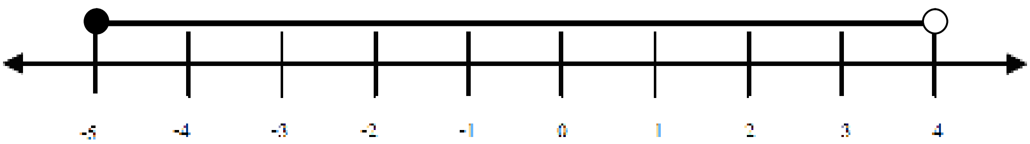
6) (- ∞ ,4)



7) (0,8)



8) [-5,4)



แบบฝึกหัดที่ 4

1). $|X| \geq 2$

$X \leq -2$ หรือ $X \geq 2$

เซตคำตอบคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid x \leq -2$ *หรือ* $x \geq 2\}$

2). $|X| < 3$

$-3 < x < 3$

เซตคำตอบคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid -3 < x < 3\}$

3). $|X-4|<3$

จะได้ $-3<X-4<3$

$-3+4<X<3+4$

$1<X<7$

เซตคำตอบคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid 1<x<7\}$

4). $|2-X|\geq 3$

จะได้ $2-X \leq -3$ หรือ $2-X \geq 3$

$-X\leq -5$ หรือ $-X\geq 1$

$X\geq 5$ หรือ $X\leq -1$

เซตคำตอบคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid x \geq 5$ *หรือ* $x\leq -1\}$

5). $|5-X|>0$

$5-x<0$ หรือ $5-x>0$

$-x<-5$ $\quad$ $-x>-5$

$x>5$ $\quad$ $x<5$

6). $|5-X|\leq 0$

$0\leq 5-x\leq 0$

$-5\leq -x\leq -5$

$5\geq x\geq 5$

7). $|2X-9|\leq 1$

$-1 \leq 2x-9\leq 1$

$-1+9\leq 2x\leq 1+9$

$8\leq 2x\leq 10$

$4\leq x\leq 5$

8). $|3X-4|<8$

$-8<3x-4<8$

$-8+4<3x<8+4$

$-4<3x<12$

$\frac{-4}{3}<x<4$

9). $|6-3X|\leq 0$

$0\leq 6-3x\leq 0$

$-6\leq -3x\leq -6$

$2\geq x\geq 0$

10). $|12-4X|>0$

$|2-4x<0$ *หรือ* $12-4x>0$

$-4x<-12$ *หรือ* $-4x>-12$

$x>3$ *หรือ* $x<3$

เฉลย บทที่ 2

เลขยกกำลัง

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงบอกฐานและเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) ฐานคือ 6 เลขชี้กำลังคือ 3

2) ฐานคือ 1.2 เลขชี้กำลังคือ -5

3) ฐานคือ -5 เลขชี้กำลังคือ 0

4) ฐานคือ $\frac{1}{2}$ เลขชี้กำลังคือ 3

2. จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) - 1,024

2) $\frac{1}{625}$

3) 1.728

4) 27

3. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1. a^8

2. $\sqrt{5}^{12} = 5^6 = 15{,}625$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

4. $(1.1)^{15}$

5. x^{10}

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าของรากที่ n ของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) 5

2) 8

3) -3

4) -5

5) $\frac{2}{3}$

6) 2

7) 5

8) $\sqrt{-64} \neq 8$ ไม่เป็นจำนวนจริง

9) -2

10) $\sqrt[4]{-16} \neq 2$ ไม่เป็นจำนวนจริง

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยใช้สมบัติของ รากที่ n

1) $\sqrt{5^2} = 5$

2) $\sqrt[3]{2^3} = 2$

3) $\sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)$

4) $\sqrt[5]{(-2)^5} = (-2)$

5) $\sqrt{(-3)^2} = (-3)$

5) $\sqrt[4]{(-2)^4} = (-2)$

6) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

7) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

8) $\sqrt[3]{240} = 2\sqrt[3]{30}$

9) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

10) $\sqrt{5}\sqrt{15} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

11) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{32} = 6\sqrt[3]{12}$

12) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

13) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2x\sqrt{2}$

2) 4

3) $2y^2$

4) (-2)

5) $6\sqrt{2}-\sqrt{2}+4\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

6) $(3\sqrt{5})(\sqrt{10})+(3\sqrt{5})(2\sqrt{5}) = 3\sqrt{50}+(6)(5)$

$= 15\sqrt{2}+30$

7) $\sqrt[3]{8a^3}=2a$

8) $3\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{8}=6$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{8x^2}$

วิธีทำ $\sqrt{8x^2} = \sqrt{2\times 2\times 2\times x\times x}$

$= 2x\sqrt{2}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{-27}}$

วิธีทำ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{-27}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{(-3)(-3)(-3)}}$

$= \dfrac{3}{(-3)}$ = -1

3) $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2$

วิธีทำ $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2 = (\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2})^2$

$= (10\sqrt{2})^2$

$= (100)(2)=200$

4) $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^{6}}{(64)^{\frac{3}{2}}}$

วิธีทำ $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^{6}}{(64)^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{(-2)}{3}+\frac{64}{\left(8^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(-2)}{3}+\frac{64}{(8)^{3}}$$

$$= \frac{(-2)}{3}+\frac{1}{8}$$

$$= \frac{-16}{24}+\frac{3}{24}=\frac{-13}{24}$$

5) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}}\cdot\dfrac{18^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

วิธีทำ $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}}\cdot\dfrac{18^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

$$= \frac{\left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}}\times\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt[4]{9}}\times\sqrt{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9}}$$

6) $\dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{(-8)^{2}}}+\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{(27)^{-\frac{1}{2}}}$

วิธีทำ $\dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{(-8)^{2}}}+\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{(27)^{-\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{(-5)}{4}-\frac{1}{9}$$

$$= \frac{-45-4}{-36}=-\frac{49}{36} \quad =-1\frac{13}{36}$$

เฉลย แบบฝึกหัด

บทที่ 3 เซต

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1) { สมุทรสาคร,สมุทรสงคราม,สุพรรณบุรี,สุรินทร์,สุราษฎร์ธานี,สมุทรปราการ,สงขลา,สระแก้ว,สระบุรี,สิงห์บุรี}

2) { a,e,i,o,u }

3) { 100,101,…,999}

4) {2,4,6,8,10,12,14,16,18}

5) { -121,-122,-123,….}

6) { 6,7,8,9,10,11,12,13,14}

7) { ϕ }

2. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1) 1

2) 6

3) 24

4) 8

3. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไข

1) { x | x เป็นจำนวนเต็มคู่และ $2 \leq x \leq 8$ }

2) { x | x เป็นจำนวนเต็มบวก }

3) { x | x = x^2 เป็นจำนวนเต็มซึ่ง x = 1,2,3,… }

4. จงพิจารณาเซตต่อไปนี้ เป็นเซตว่างเรือเซตจำกัดหรือเซตอนันต์

1) เซตจำกัด

2) เซตจำกัด

3) เซตอนันต์

4) เซตว่าง

5) เซตว่าง

6) เซตว่าง

7) เซตจำกัด

8) เซตว่าง

9) เซตจำกัด

10) เซตอนันต์

5. เซตต่อไปนี้เซตใดบ้างที่เป็นเซตที่เท่ากัน

1) A = B

2) D = E

3) F $\neq$ G

4) Q = H

แบบฝึกหัดที่ 2

1) ถ้า A = { 0,1,2,3,4,5}, และ B { 1,2,3,4 } จงหา

1) A $\cup$ B = { 0,1,2,3,4,5}

2). B $\cup$ A = { 0,1,2,3,4 ,5}

3). A $\cap$ B = { 1,2,3,4 }

4). B $\cap$ A = { 1,2,3,4 }

5). A – B = {0,5}

6). B – A = ϕ

2). กำหนดให้ U = { 1,2,3,..,10 }

A = { 2,4,6,8,10 }

B = { 1,3,5,7,9}

C = { 3,4,5,6,7 }

จงหา

9. A $\cap$ B = { ϕ }

10. B $\cup$ C = { 1,3,4,5,6,7,9}

11. B $\cap$ C = { 3,5,7}

12. A $\cap C$ = { 4,6}

13. C' = { 1,2,8,9,10}

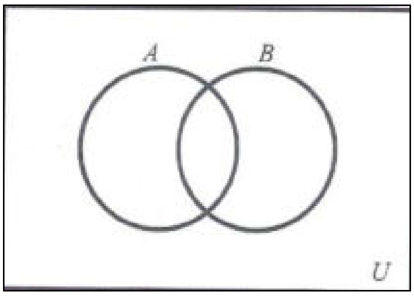
14. $C' \cap A$ = { 2,8,10 }

15. $C' \cap B$ = {1,9}

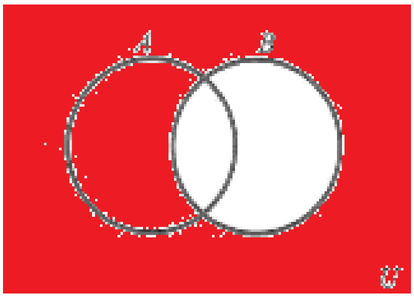
16. (A $\cap B) \cup B$ = { 1,3,5,7,9}

แบบฝึกหัดที่ 3

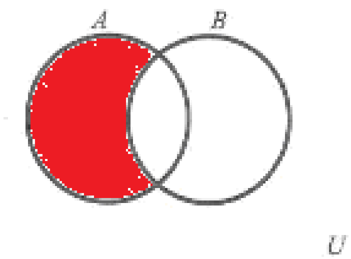
1. จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้



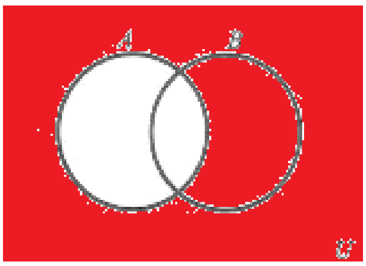
1) B'



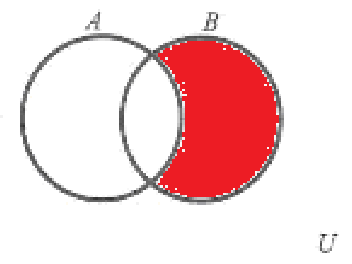
2) $A \cap B'$



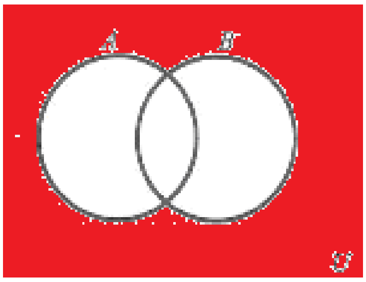
3) A'



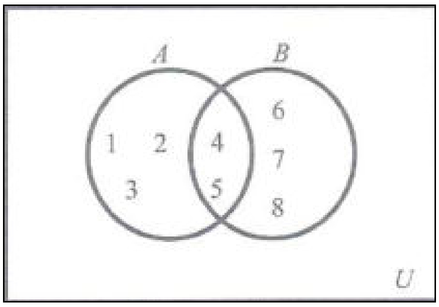
4) $A' \cup B$



5) $A' \cup B'$



2. จากแผนภาพที่กำหนดให้



จงหาค่า

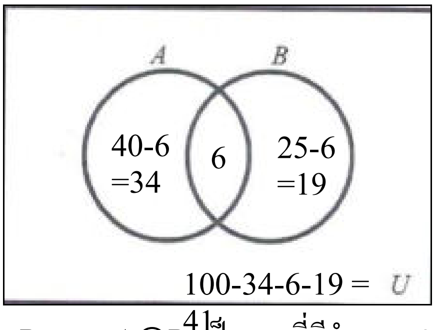
1. A' ={ 6,7,8}

2. $(A \cap B)'$ = {1,2,3,6,7,8}

3. $A'UB$ = { 4,5,6,7,8}

4. $A' \cap B$ = { 6,7,8}

3. จากแผนภาพ



กำหนดให้ U , A, B และ $A \cap B$ เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก 100 ,40,25, และ 6 ตามลำดับ จงเติมจำนวนสมาชิกของเซตต่าง ๆ ลงในตารางต่อไปนี้

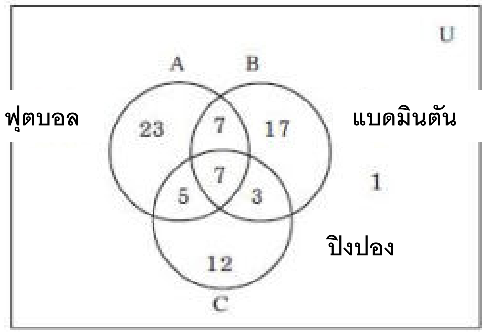
เซต	$A - B$	$B - A$	$A \cap B$	A'	B'	$(A \cup B)$
จำนวนสมาชิก	34	19	6	19 + 41 = 60	34 + 41 = 75	34 + 6 + 19 = 59

4. จากการสอบถามผู้เรียนชอบเล่นกีฬา 75 คน พบว่า ชอบเล่นปิงปอง 27 คน ชอบเล่นแบตมินตัน 34 คน ชอบเล่นฟุตบอล 42 คน ชอบทั้งฟุตบอลและปิงปอง 14 คน ชอบทั้งฟุตบอลและแบตมินตัน 12 คน ชอบทั้งปิงปองและแบดมินตัน 10 คน ชอบทั้งสามประเภท 7 คน จงหาว่านักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาประเภทเดียวมีกี่คน

วิธีทำ A = เล่นฟุตบอล 42 คน

B = เล่นแบดมินตัน 34 คน

C = เล่นปิงปอง 27 คน



จำนวนนักศึกษาที่ชอบเล่นกีฬาประเภทเดียว = 23 + 17 + 12 = 52 คน

เฉลย บทที่ 4
การให้เหตุผล

แบบฝึกหัดที่ 1

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

6) 1, 4, 9, 16, $\boxed{25}$, $\boxed{36}$, 49 , 64, $\boxed{81}$, $\boxed{100}$

7) 2, 7, 17, $\boxed{32}$, 52 , $\boxed{77}$, $\boxed{107}$

8) 5, 10, 30, 120, $\boxed{600}$, $\boxed{3,600}$

9) 36 = 444444444

45 = 555555555

81 = 999999999

10) $2 + 4 + 6 + 8 + \boxed{10} = 30$

$2 + 4 + \boxed{6} + 8 + \boxed{10} + 12 = \boxed{42}$

$2 + \boxed{4} + \boxed{6} + 8 + \boxed{10} + 12 + 14 = \boxed{56}$

$2 + \boxed{4} + \boxed{6} + 8 + \boxed{10} + 12 + 14 + \boxed{16} = \boxed{72}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงตรวจสอบผลที่ได้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

1) สมเหตุสมผล

2) สมเหตุสมผล

3) ไม่สมเหตุสมผล

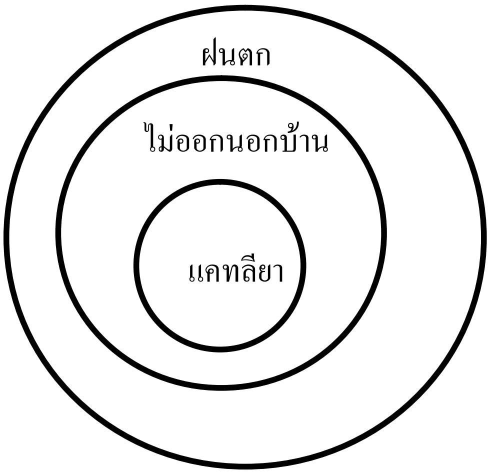
4) ไม่สมเหตุสมผล

5) ไม่สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัดที่ 3

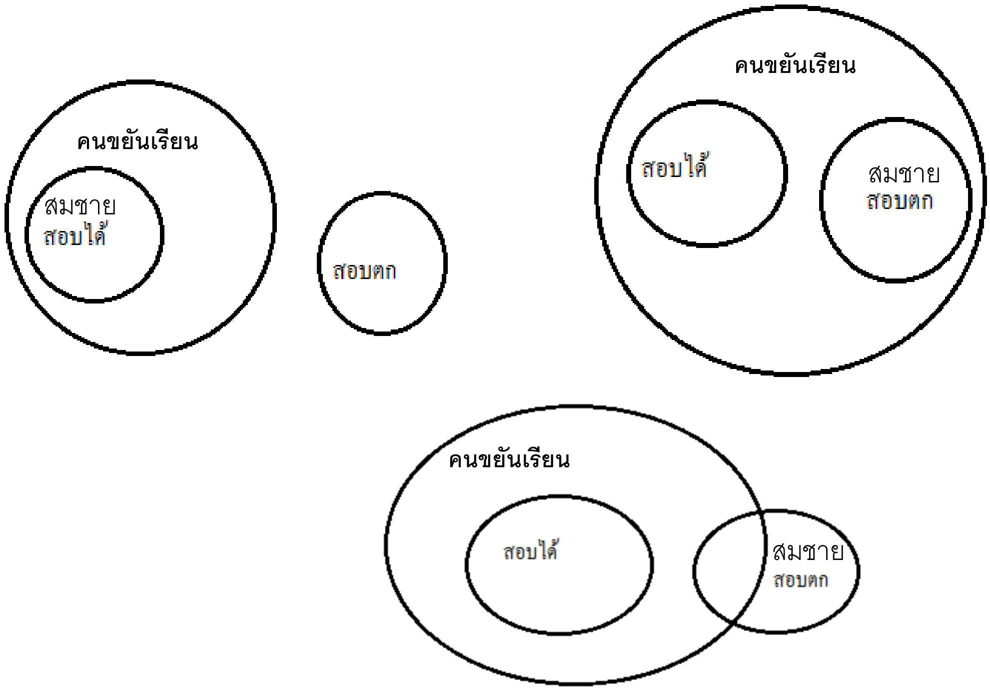
1. จงตรวจสอบผลที่ได้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

1)



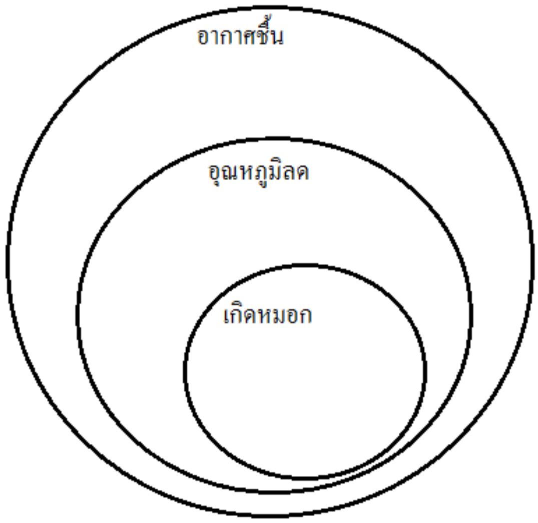
จากเหตุที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า สมเหตุสมผล

2)



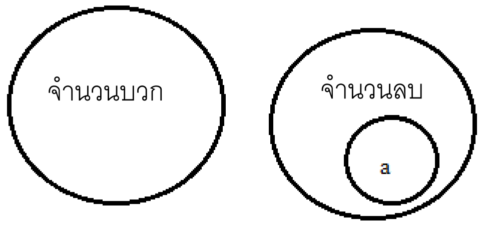
จากเหตุที่ 1 และ 2 จะเห็นได้ว่า ผลที่จะเกิดขึ้นมีได้หลาย ผลด้วยกัน สรุปได้ว่า ไม่สมเหตุสมผล

3)



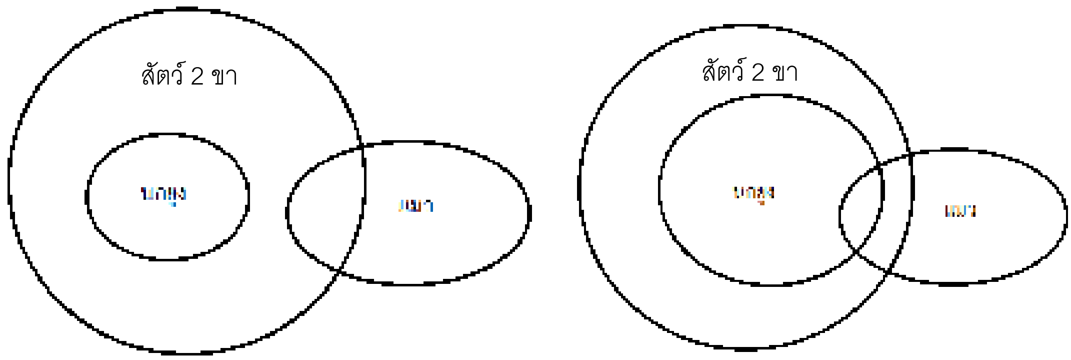
จะเห็นได้ว่า จากเหตุการณ์ทั้ง 3 เหตุ ผลสรุปที่ได้นั้น สมเหตุสมผล

4)



จะเห็นได้ว่า จากเหตุที่ 1 และ 2 ผลที่ได้นั้น สมเหตุสมผล

5.



จะเห็นได้ว่า จากเหตุที่ 1 และ 2 ผลที่จะเกิดขึ้นมีได้หลาย ผลด้วยกัน สรุปได้ว่า ไม่สมเหตุสมผล

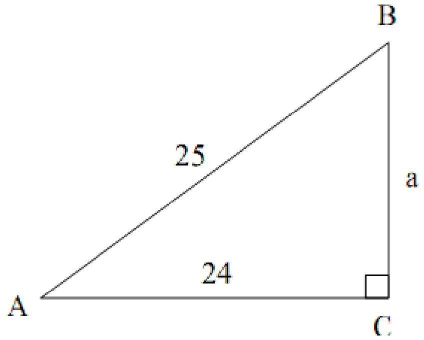
เฉลย บทที่ 5

ตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนความสัมพันธ์ของความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส และหาความยาวของด้านที่เหลือ

(1)



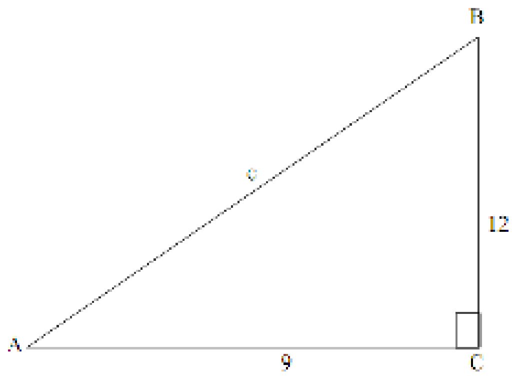
วิธีทำ $a^2 = 25^2 - 24^2$

$= 625 - 576$

$= 49$

$a = 7$

(2)



วิธีทำ $c^2 = 12^2 + 9^2$

$= 144 + 81$

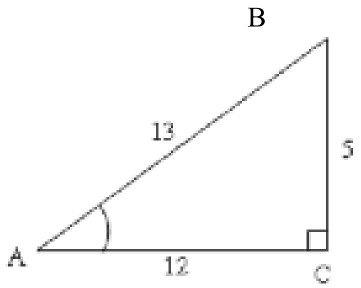
$= 225$

$a = 15$

2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C} = 90^0$ และความยาวของด้านทั้งสาม ดังรูป

จงหา 1) sin A , cos A และ tan A

2) sin B , cos B และ tan B



sin A = $\frac{5}{13}$

cos A = $\frac{12}{13}$

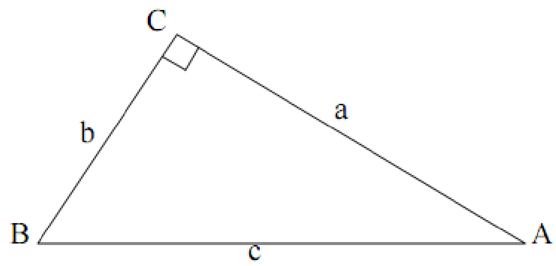
tan A = $\frac{5}{12}$

sin B = $\frac{12}{13}$

cos B = $\frac{5}{13}$

tan B = $\frac{12}{5}$

3. จงหาว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นค่าไซน์(sin) หรือโคไซน์(cos) หรือแทนเจนต์(tan) ของมุมที่กำหนดให้



1. sin A

2. $\frac{1}{\tan B}$

3. cos A

4. cos B

4. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มีด้าน AB = 10 และ AC = 8

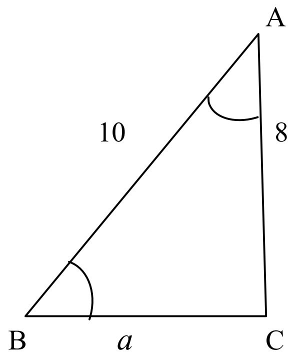
จงหา 1) ความยาวด้าน BC

วิธีทำ $AB^2 = 10^2 - 8^2$

$= 100 - 64$

$= 36$

$a = 6$



2) $\sin A = \dfrac{6}{10}$

$\cos A = \dfrac{8}{10}$

$\tan A = \dfrac{6}{8}$

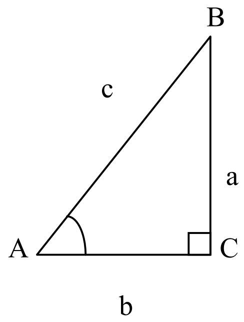
3) $\sin B = \dfrac{8}{10}$

$\cos B = \dfrac{6}{10}$

$\tan B = \dfrac{8}{6}$

5. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, มุม B และมุม C ตามลำดับ

(1) ถ้า cot A = $\sqrt{3}$, a = 5 จงหาค่า b,c



วิธีทำ $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

$\sqrt{3} = \frac{b}{5}$

$b = 5\sqrt{3}$

จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$c^2 = b^2 + a^2$

$= (5\sqrt{3})^2 + 5^2$

$= 75 + 25$

$= 100$

(2) ถ้า cos B = $\frac{3}{5}$ และ a = 9 จงหาค่า tan A

วิธีทำ

$\cos a = \frac{a}{c}$

$\frac{3}{5} = \frac{a}{c}$

$\therefore c = \frac{a}{c} \times 5 = 15$

จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

หรือ $c^2 = b^2 + a^2$

$15^2 = 6^2 + 9^2$

$b^2 = 225 - 81$

$= 144$

$\therefore b = 12$

ดังนั้น $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าต่อไปนี้

1) $\sin 30^0 \sin 60^0 - \cos 30^0 \cos 60^0$

$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \quad = \quad 0$

2) $(\sin 60^0)^2 + (\cos 60^0)^2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

3) $1-\tan 45^0$

$1-1^2 = 0$

2. จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้จากตาราง

1) $\sin 20^0 = 0.342$

2) $\sin 38^0 = 0.616$

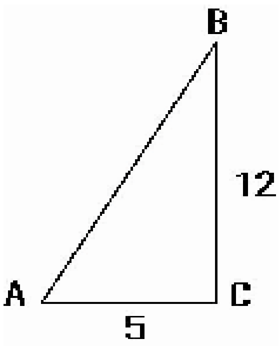
3) $\cos 50^0 = 0.643$

4) $\cos 52^0 = 0.616$

5) $\tan 77^0 = 4.331$

6) $\tan 89^0 = 57.290$

3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูป



วิธีทำ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144$

$= 169$

AB = B

$\cos B = \frac{12}{13}$

$\sin B = \frac{5}{13}$

$\tan B = \frac{5}{12}$

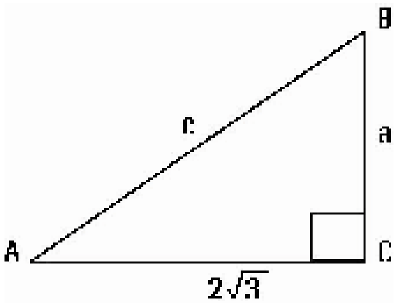
$\sec B = \frac{13}{12}$

$\text{cosec B} = \frac{13}{5}$

$\cot B = \frac{12}{5}$

4. จงหาค่า a, b หรือ c จากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

(1)



จาก $\cos 30^0 = \frac{2\sqrt{3}}{c}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{c}$

c = $\frac{2\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}} = 4$

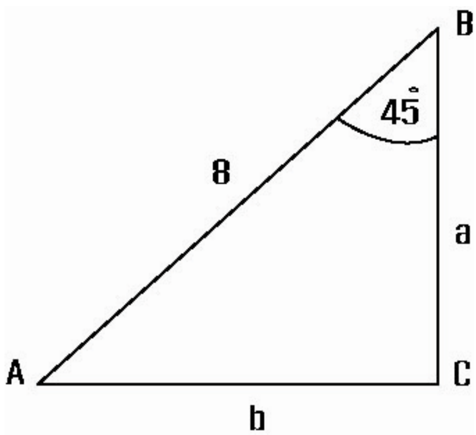
จาก $\sin 30^0 = \frac{a}{c}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{4}$

$a = \frac{1 \times 4}{2} = 2$

ดังนั้น a = 2 และ c = 4

(2)



จาก $\sin 45^0 = \frac{b}{8}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b}{8}$$

$$b = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

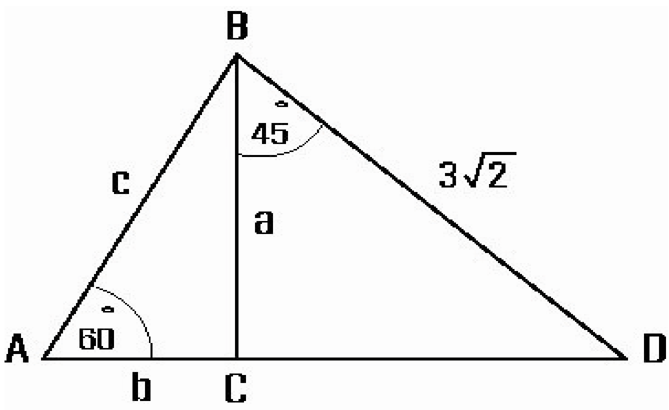
จาก $\tan 45^0 = \frac{b}{a}$

$$1 = \frac{4\sqrt{2}}{a}$$

$$\mathbf{a} = 4\sqrt{2}$$

ดังนั้น $\mathbf{a} = 4\sqrt{2}$ **และ** $b = 4\sqrt{2}$

(3)



จาก $\triangle\ B\hat{C}D$ มี $B\hat{C}D = 90^0$

$$\sin 45^0 = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{CD}{3\sqrt{2}}$$

$$CD = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\tan 45^0 = \frac{CD}{BC}$$

$$1 = \frac{3}{a}$$

a =3

จาก $\triangle$ ABC มี $A\hat{C}B = 90^0$

$$\sin 60^0 = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{c}$$

$$c = \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$c = 2\sqrt{3}$$

$$\cos 60^0 = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

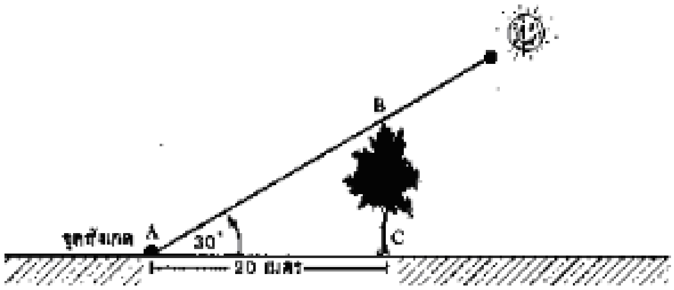
$$b = \frac{1 \times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \sqrt{3}$$

ดังนั้น $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ และ $c = 2\sqrt{3}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 20 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านปลายของเงาต้นไม้ และยอดต้นไม้ ทำมุม 30 องศา กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้



ให้ BC แทน ความสูงของต้นไม้

AC แทน เงาของต้นไม้ทอดยาว 20 เมตร

AB แทน แนวเส้นตรงที่ลากผ่านปลายของเงาต้นไม้และยอดต้นไม้

โดย $B\hat{A}D = 30^\circ$

ดังนั้น ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีมุม C เป็นมุมฉาก

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

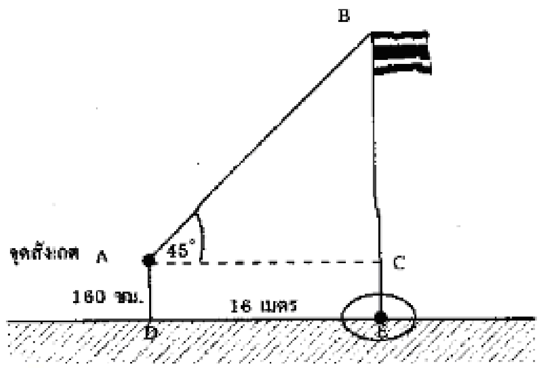
$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{20}$$

$$BC = \frac{1 \times 20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

ต้นไม้สูง $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ เมตร หรือประมาณ 11.55 เมตร

2. วินัยต้องการหาความสูงของเสาธงโรงเรียน จึงทำมุมขนาด 45 องศา เพื่อใช้ในการเล็งไปที่ยอดเสาธง ถ้าในขณะที่เล็งนั้นเขามองไปที่ยอดเสาธงได้พอดี เมื่อก้าวไปอยู่ที่จุดซึ่งอยู่ห่างโคนเสาธง 16 เมตร วินัยมีความสูง 160 เซนติเมตร จงหาว่าเสาธงสูงประมาณกี่เมตร



ให้ BE แทน ความสูงของเสาธง

AD แทน ความสูงของวินัย 160 เซนติเมตร (1.6 เมตร)

AC แทน ระยะห่างระหว่างจุดที่วินัยยืนและเสาธงเป็นระยะ 16 เมตร

จุด A เป็นจุดสังเกต

BAC = 45 องศา

จาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan 45^{\circ} = \frac{BC}{16}$$

$$1 = \frac{BC}{16}$$

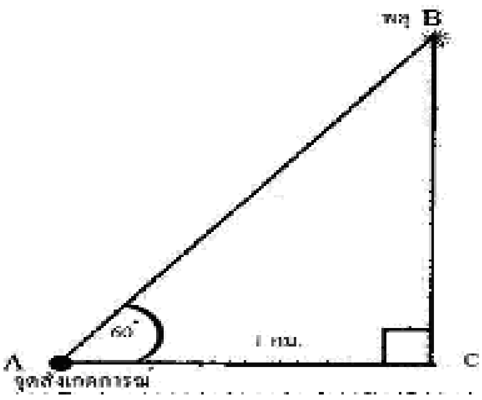
BE= BC+CE

BE= 16+1.6

BE = 17.6

ดังนั้น เสาธงสูง 17.6 เมตร

3. จุดพลุขึ้นไปในแนวดิ่ง โดยกำหนดจุดสังเกตการณ์บนพื้นดินห่างจากตำแหน่งที่จุดพลุ 1 กิโลเมตร ในขณะที่มองเห็นพลุทำมุม 60 องศา กับพื้นดิน พลุขึ้นไปสูงเท่าใด และอยู่ห่างจากจุดสังเกตการณ์เป็นระยะทางเท่าใด



ให้ A เป็นจุดสังเกต

C เป็นจุดที่จุดพลุ โดย AC แทนระยะ 1 กิโลเมตร

B เป็นจุดที่พลุขึ้นไปสูงทำให้ BAC = 60 องศา

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{1}$$

$$BC = \sqrt{3} \approx 1.732$$

จาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$AB = 2$$

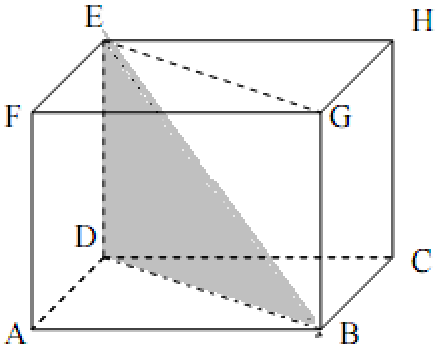
ดังนั้นพลุขึ้นไปสูง 1,732 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากจุดสังเกตเป็นระยะ 2 กิโลเมตร

เฉลย บทที่ 6

การใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดมุมสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ก. ผืนผ้า

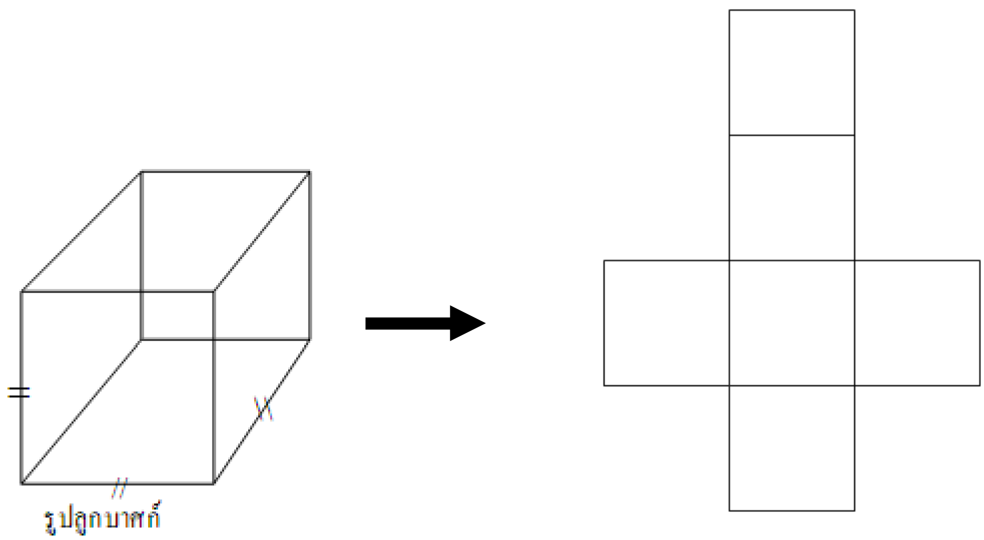
ข. 90 องศา

ค. แนวทแยง

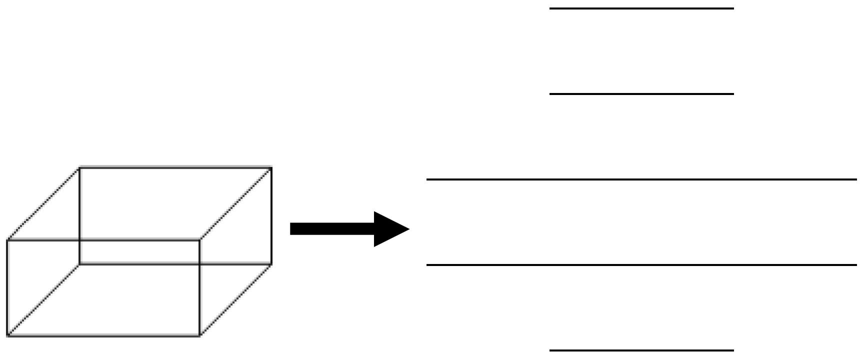
ง. สามเหลี่ยม BDE 2 รูปประกอบกันเป็น สี่เหลี่ยม BDEG

2. จงเขียนรูปคลี่ของทรงสามมิติต่อไปนี้

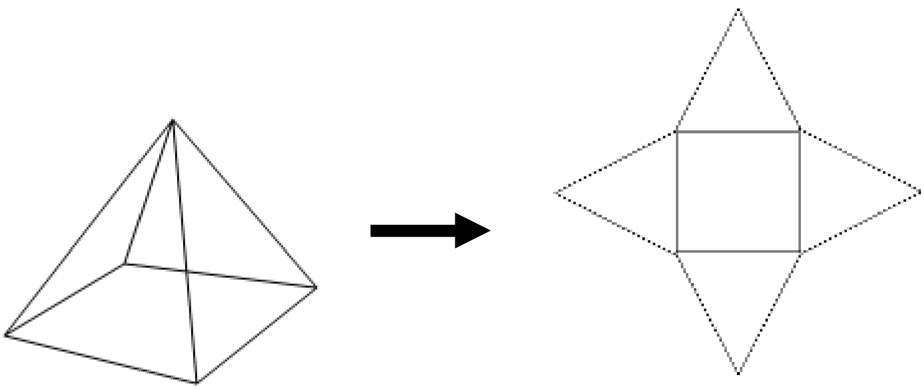
(1)



(2)

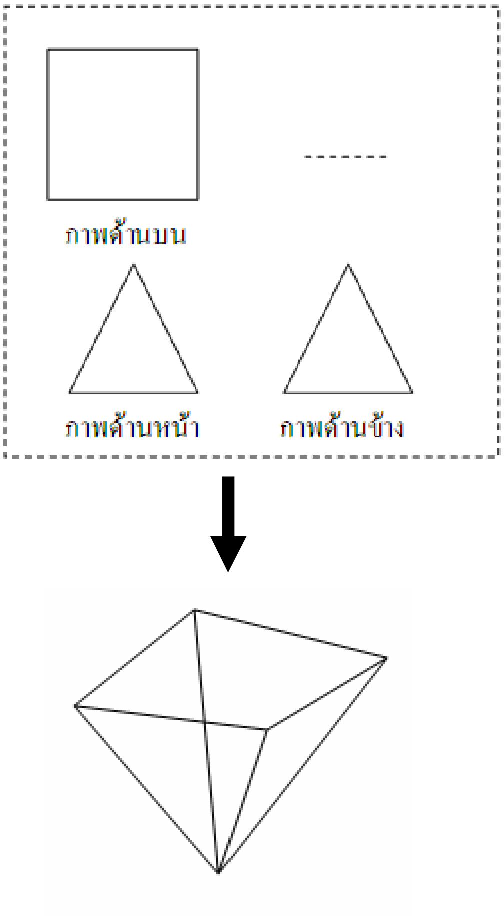


(3)

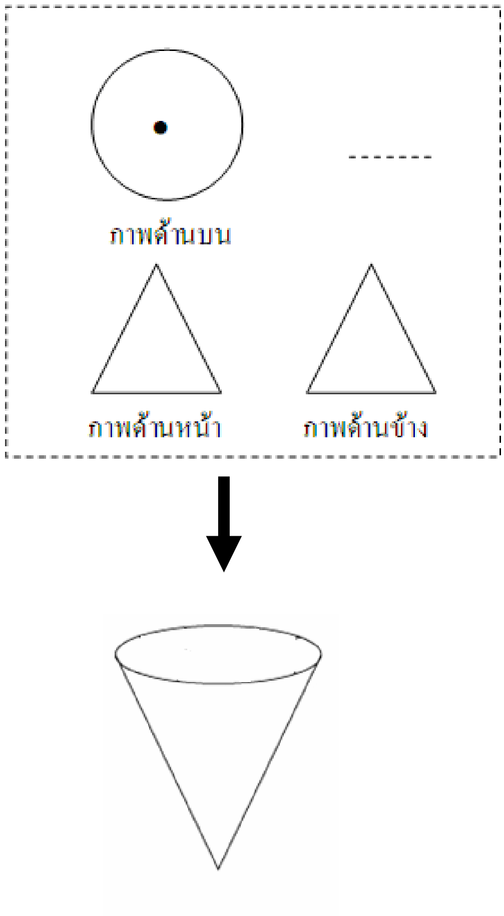


3. จงเขียนรูปทรงสามมิติจากมุมมองภาพด้านบน ภาพด้านหน้า ภาพด้านข้างที่กำหนดให้

(1)



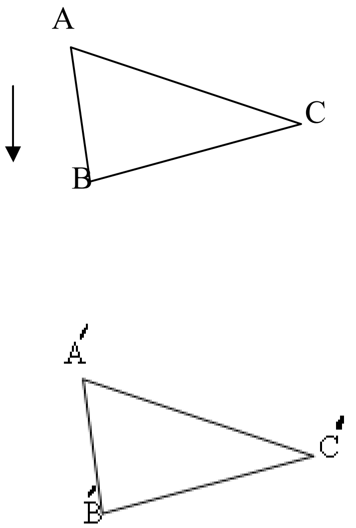
(2)



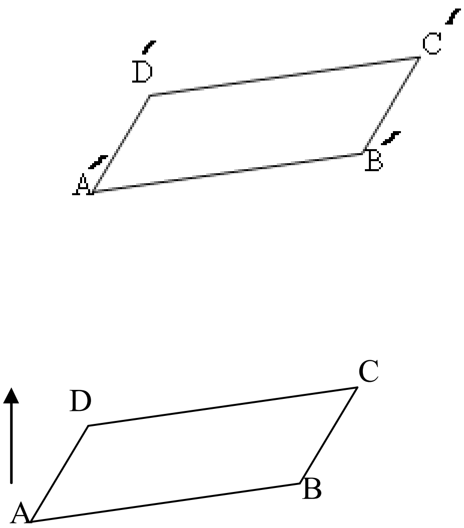
แบบฝึกหัดที่ 2

1. ให้เขียนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานจากรูปต้นแบบและทิศทางที่กำหนดให้

ก.

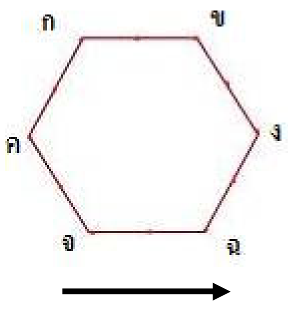


ข.

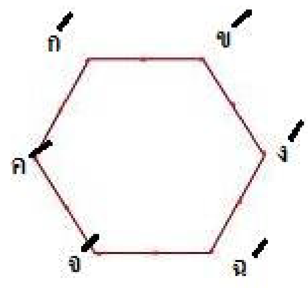


2. ให้เขียนภาพการเลื่อนขนานโดยกำหนดภาพต้นแบบ ทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนานเอง

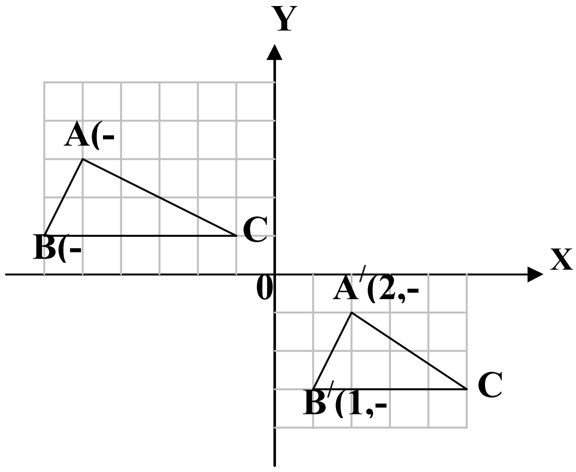
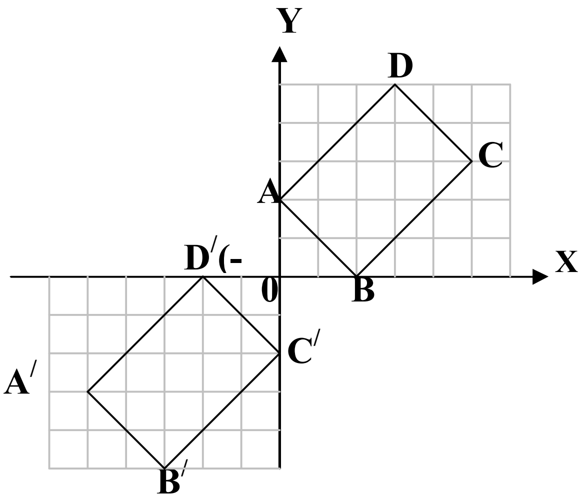
ก.



ข.



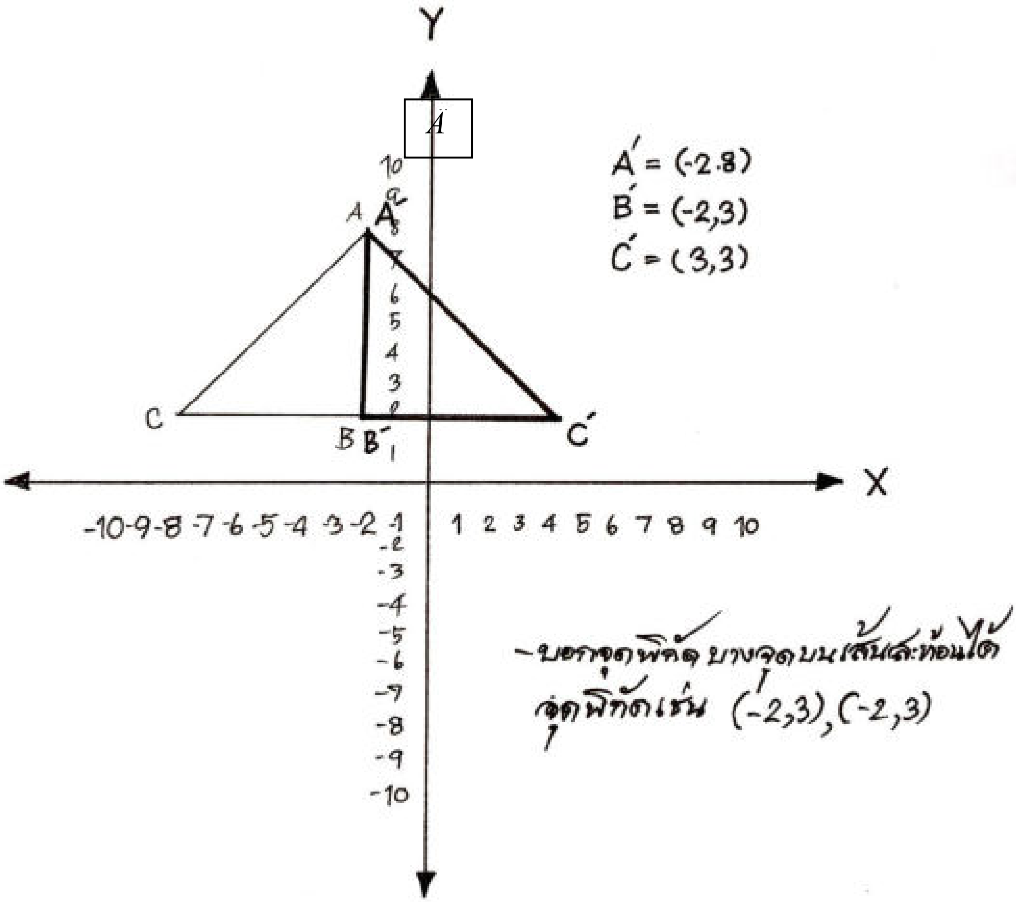
3.

ภาพ	พิกัดของตำแหน่งที่กำหนดให้
	$C'(5,-3)$
	$A'(-5,-3)$ $B'(-3,-5)$ $C'(0,-2)$

แบบฝึกหัดที่ 3

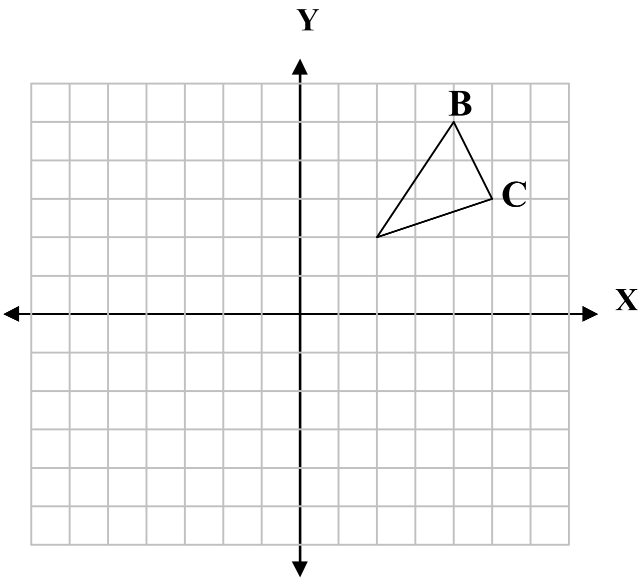
คำชี้แจง จงพิจารณารูปที่กำหนดให้แล้ว

- เขียนรูปสะท้อน
- เขียนเส้นสะท้อน
- บอกจุดพิกัดของจุดยอดของมุมของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการสะท้อน
- บอกจุดพิกัดบางจุดบนเส้นสะท้อนที่ได้

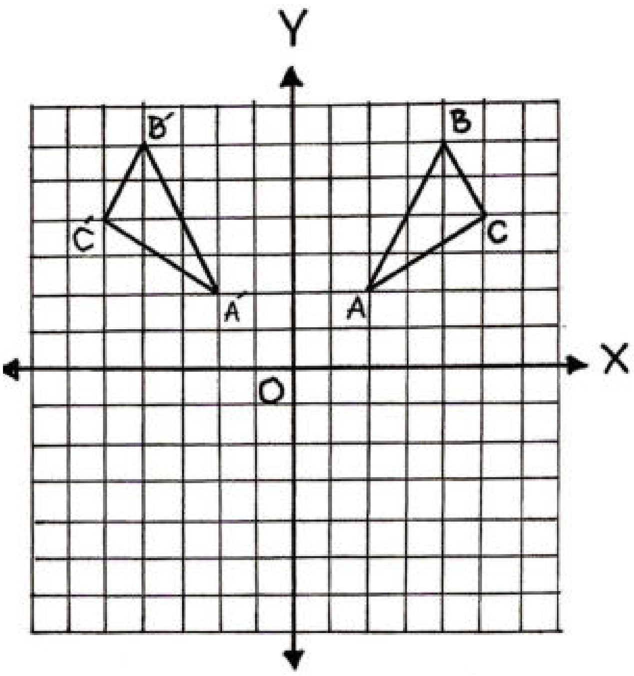


แบบฝึกหัดที่ 4

1.

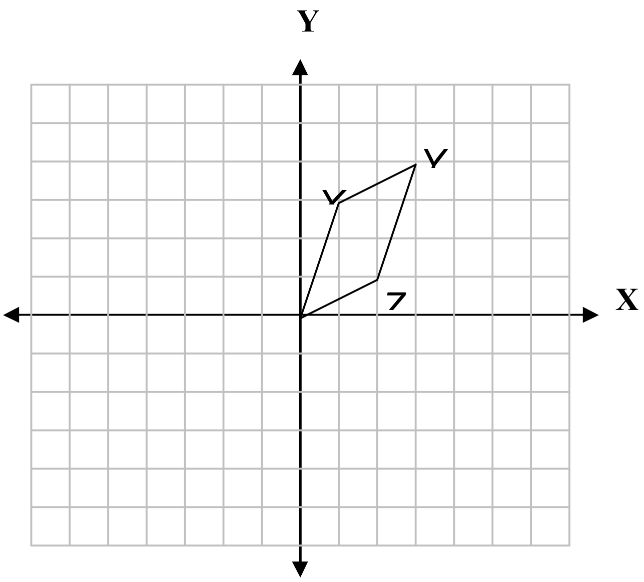


ให้เติมรูปสามเหลี่ยม A′B′C′ ที่เกิดจากการหมุนสามเหลี่ยม ABC เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด (0 , 0) เป็นจุดหมุน

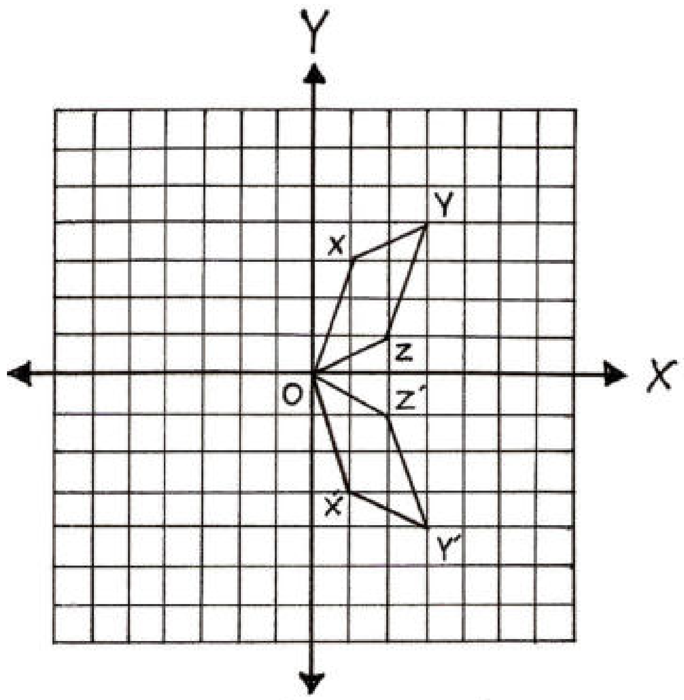


$A' = (-2,2)$ $B' = (-4,6)$ $C' = (-5,4)$

2.

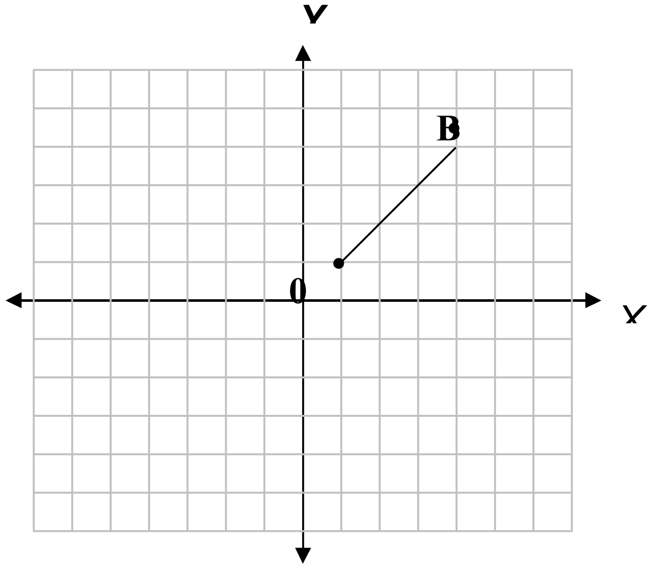


ให้เติมรูปสี่เหลี่ยม **O′X′Y′Z′** ที่เกิดจากการหมุนสี่เหลี่ยม **OXYZ** เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 270° และใช้จุด (0 , 0) เป็นจุดหมุน

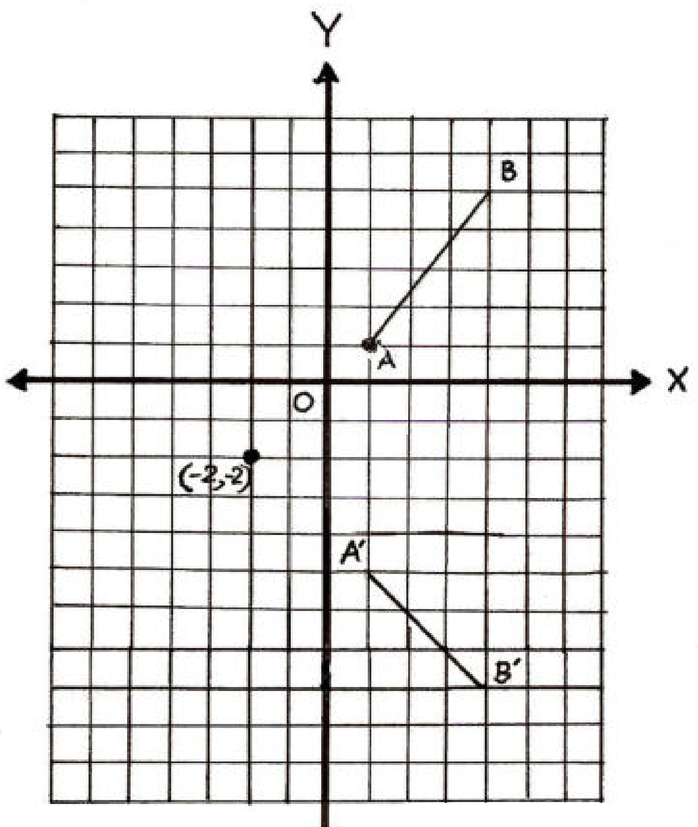


$X' = (1, -3)$ $Y' = (3, -4)$ $Z' = (2, -1)$

3.

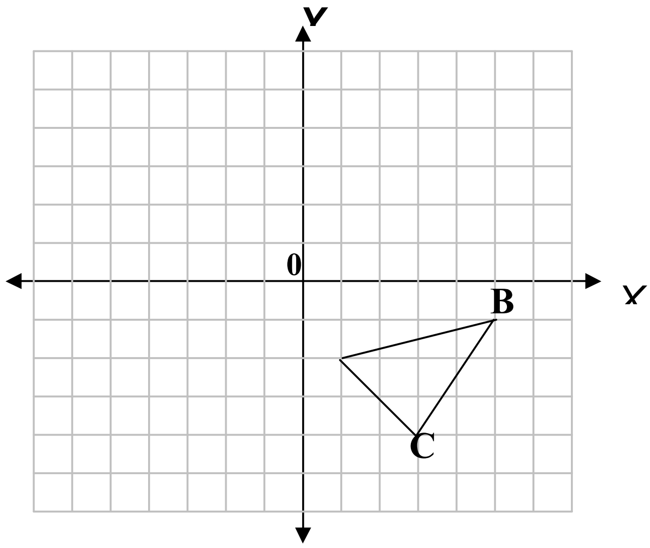


ให้เติมส่วนของเส้นตรง A′B′ ที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรง AB เพียงอย่างเดียว โดยหมุนตามเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด (-2, -2) เป็นจุดหมุน

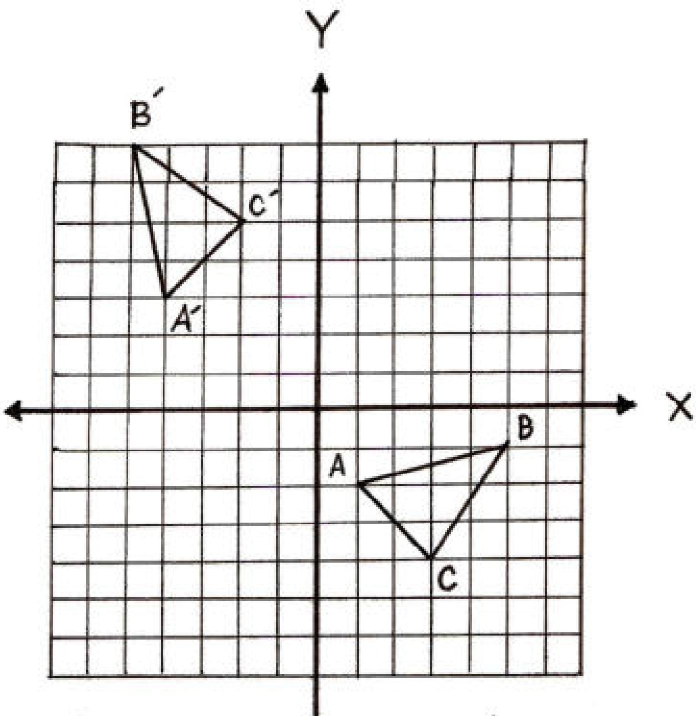


$A' - (1,\text{-}5) \qquad B' = (4,\text{-}8)$

4.



ให้เติมรูปสามเหลี่ยม A′B′C′ ที่เกิดจากการหมุนสามเหลี่ยม ABC เพียงอย่างเดียว โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° และใช้จุด (-4 , -2) เป็นจุดหมุน



A′=(-4,3) B′=(-5,7) C′=(-2,5)

เฉลย
บทที่ 7 สถิติ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนข้อมูลสถิติที่เกี่ยวข้องกับบุคคลในครอบครัว เช่น เพศ อายุ สถานภาพ อาชีพ

   ตอบ อายุเฉลี่ยของคนในครอบครัว 45.2 ปี อาชีพ : รับราชการ, ลูกจ้าง, ทำงานอิสระ

2. จงยกตัวอย่างข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณมาอย่างละ 5 ชนิด

   ตอบ ข้อมูลเชิงปริมาณ
   1. จำนวน รถยนต์ในกรุงเทพมหานคร
   2. จำนวนบุตรในครอบครัว
   3. น้ำหนักเฉลี่ยของนักศึกษา กศน.บ้านแพ้ว
   4. จำนวนคนงานแยกตามเงินเดือน
   5. จำนวนของผู้เข้าร่วมประชุมที่มีอายุ 20 ไปขึ้นไป

   ข้อมูลเชิงคุณภาพ
   1. สถานภาพของผู้เข้าร่วมอบรม
   2. รายชื่อจังหวัดที่มีนักศึกษาที่เข้าสอบ
   3. โรคที่มีผู้ป่วยมารักษามากที่สุดในเดือนมกราคม 54 3 ลำดับ
   4. กลุ่มเลือดของคนในโรงงาน
   5. ศาสนาคริสต์ที่คนในประเทศไทยนับถือ

3. จงพิจารณาว่าข้อมูลต่อไปนี้เป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ และข้อมูลเชิงปริมาณ

   - พนักงานในรงงานแห่งหนึ่งถูกสอบถามถึงสุขภาพร่างกายในขณะปฏิบัติงาน

     ☑ คุณภาพ ☐ ปริมาณ

     เป็น ข้อมูลเชิงคุณภาพ เพราะคำตอบจะไม่ให้ตอบออกมาเป็นตัวเลข

   - นักศึกษาจำนวนหนึ่งที่ถูกสอบถามถึงค่าใช้จ่ายในการไปพบกลุ่มที่ห้องสมุด

     ☑ คุณภาพ ☐ ปริมาณ

     เป็น ข้อมูลเชิงปริมาณ เพราะค่าใช้จ่ายเป็นข้อมูลทางตัวเลข สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้

4. ข้อมูลปฐมภูมิต่างจากข้อมูลทุติยภูมิอย่างไร จงอธิบายและยกตัวอย่าง

   ตอบ ข้อมูลปฐมภูมิเป็นข้อมูลที่เราต้องเก็บ หรือสำรวจจากแหล่งที่เป็นข้อมูลโดยตรง ฯลฯ

   ข้อมูลทุติยภูมิเป็นข้อมูลเก็บจากแหล่งข้อมูลที่มีการเก็บรวบรวมไว้ก่อนแล้ว

5. ข้อมูลต่อไปนี้ควรใช้วิธีใดในการรวบรวม (ตอบได้หลายคำตอบ)

<u>ตอบ</u>

1 สำรวจ สัมภาษณ์ ใช้แบบสอบถาม

2 สำรวจ สัมภาษณ์ ใช้แบบสอบถาม

3 ใช้แบบสอบถาม ข้อมูลจากสาธารณสุขชุมชนไปชั่งน้ำหนักเด็กในหมู่บ้านทีละคน

4. แบบสอบถาม ทดลอง

5 ข้อมูลจากสาธารณสุข

6. จงบอกข้อดีข้อเสียของการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยวิธีการต่าง ๆ

<u>ตอบ</u> ข้อดี 1. ถูกต้องแม่นยำ

2. ได้ข้อมูลเชิงลึก
3. ความสมบูรณ์ครบถ้วนของข้อมูล
4. ตรงความต้องการของผู้ใช้

ข้อเสีย

1. ต้องใช้เวลา
2. มีค่าใช้จ่ายเป็นปัจจุบัน
3. การเก็บข้อมูลอาจบันทึกคาดเคลื่อน

7. ข้อมูลการสำรวจอายุ (ปี) ของคนงานจำนวน 50 คนในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

27	35	2	49	24	29	22	37	32	49
33	28	30	24	26	45	38	22	40	46
20	31	18	27	25	42	21	30	25	27
26	50	31	19	53	22	28	36	24	23
21	29	37	32	38	31	36	28	27	41

กำหนดความกว้างของอันตรภาคชั้นเป็น 8

1. จงสร้างตารางแจกแจงความถี่

คะแนน	รอยขีด	ความถี่
16 – 23	𝍸 ////	9
24 – 31	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //	22
32 – 39	𝍸 𝍸	10
40 – 47	𝍸	5
48 – 55	////	4

2. จงหาขีดจำกัดชั้นที่แท้จริงและจุดกึ่งกลางชั้น

คะแนน	ความถี่	ขีดจำกัดบน	ขีดจำกัดล่าง	จุดกึ่งกลางชั้น
16 – 23	9	23.5	15.5	19.5
24 – 31	22	31.5	23.5	27.5
32 – 39	10	39.5	31.5	33.5
40 – 47	5	47.5	40.5	43.5
48 – 55	4	55.5	47.5	51.5

3. จงหาความถี่สะสม ความถี่สัมพัทธ์ และความถี่สะสมสัมพัทธ์

คะแนน	ความถี่	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสม	ความถี่สะสมสัมพัทธ์
16 – 23	9	0.18	9	0.18
24 – 31	22	0.44	31	0.62
32 – 39	10	0.2	41	0.82
40 – 47	5	0.1	46	0.92
48 – 55	4	0.08	50	1

4. จงหาพิสัยของข้อมูลชุดนี้

   53 – 18 = 35

5. จงหาจำนวนคนงานที่มีอายุต่ำกว่า 45 ปี

   44 คน

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของน้ำหนักเด็ก 20 คน ซึ่งมีน้ำหนักเป็นกิโลกรัม ดังนี้

32	60	54	48	60	52	46	35	60	38
44	48	49	54	47	48	44	48	60	32

ค่าเฉลี่ย $\bar{x} = \frac{959}{20} = 47.95$

มัธยฐาน 32 32 35 38 44 44 46 47 48 48 48 48 49 52 54 54 60 60 60 60

ตำแหน่งของมัธยฐาน = $\frac{N+1}{2} = 10.5$

= 48

ฐานนิยม 48 และ 60

2. ตารางแสดงรายได้พิเศษต่อวันของลูกจ้างในสำนักงานแห่งหนึ่ง

รายได้ (บาท)	**จำนวน (f)**	**จุดกลาง (x)**	**fx**	**ความถี่สะสม**
140 – 144	1	142	142	1
145 – 149	2	147	294	3
150 – 154	34	152	5168	37
155 – 159	25	157	3925	62
160 – 164	10	162	1620	72
165 - 169	5	167	835	77
170 – 174	3	172	516	80
$\sum f = 80$		$\sum fx = 12,500$		

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) = $\frac{\sum fx}{\sum f}$

$= \frac{12,500}{80}$

$= 156.25$

รายได้พิเศษต่อวันเฉลี่ย 156.25 บาท

2. มัธยฐาน : $\frac{N}{2} = \frac{80}{2} = 40 \therefore$ มัธยฐานอยู่ในขั้น 155 – 159

อันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่คือ 155 – 159

จากสูตร $Md = Lo + i \left\{ \frac{\frac{N}{2} - \sum fl}{fm} \right\}$

เมื่อ N = 80 , i = 50, Lo = 154.5 , $\sum f_l = 37$, fm = 25

$\therefore \ Md = 154.6 + 5 \left\{ \frac{40 - 37}{25} \right\} = 155.10$

มัธยฐานของรายได้พิเศษต่อวันมีค่าเป็น 155.10 บาท

3. ฐานนิยม : ฐานนิยมอยู่ในชั้น 150 – 154

จากสูตร $Mo = Lo + i \left\{ \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right\}$

เมื่อ Lo = 149.5, d_1 = 34 – 25 = 9, d_2 = 34 – 2 = 32, I = 5

$\therefore \ Mo = 149.5 + 5 \left(\frac{9}{9 + 32} \right) = 150.5$

ฐานนิยมของรายได้พิเศษต่อวัน มีค่าเป็น 150.5 บาท

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ว่า จำนวนคนไข้ (คนไข้ใน) ของโรงพยาบาลอำเภอแห่งหนึ่งในปี 2545 และ 2546 ซึ่งได้มากจากการสำรวจของโรงพยาบาลเป็นดังนี้ พ.ศ. 2545 มีเพศชาย 4,571 คน หญิง 3,820 คน ปี 2546 มีเพศชาย 5,830 หญิง 4,259 คน จงนำเสนอข้อมูล

ก. ในรูปบทความ

ผลจากการสำรวจจำนวนคนไข้ในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง ในปี 2545 และ 2546 มีดังนี้ ปี 2545 มีจำนวนคนไข้ ทั้งหมด 8,391 แบ่งเป็น ชาย 4,571 คน หญิง 3,820 คน และในปี 2546 มีจำนวนทั้งหมด 10,089 คน แบ่งเป็น ชาย 5,830 หญิง 4,259 คน

ข. ในรูปบทความ / ข้อความกึ่งตาราง

ผลจากการสำรวจจำนวนคนไข้ในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง ในปี 2545 และ 2546 มีดังนี้

พ.ศ. 2545	มีเพศชาย 4,571 คน	หญิง 3,820 คน
พ.ศ. 2546	มีเพศชาย 5,830	หญิง 4,259 คน

2. จากข้อมูลที่นำเสนอในรูปตาราง ร้อยละของนักศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของสถาบันการศึกษาแห่งหนึ่ง ได้ผลการเรียนใน 4 วิชาหลักในปี 2546 มีดังนี้

หมวดวิชา	**ระดับผลการเรียน**				
	4	3	2	1	0
คณิตศาสตร์	4.49	9.51	22.88	43.58	16.28
ภาษาไทย	5.82	12.14	26.55	41.18	13.10
วิทยาศาสตร์	4.82	11.23	23.50	39.81	19.91
สังคมศึกษา	9.04	16.60	29.10	34.75	9.09
รวม	**84.55**			**13.67**	

จากตารางจงตอบคำถามต่อไปนี้

1. หมวดวิชาใดที่นักศึกษาได้ระดับผลการเรียน 4 มากที่สุดและได้ระดับ 0 น้อยที่สุดและคิดเป็นร้อยละเท่าไร

<u>ตอบ</u> วิชาที่ได้ระดับผลการเรียน 4 มากที่สุด คือวิชาสังคมศึกษา คิดเป็นร้อยละ 9.04 และได้ระดับ 0 น้อยที่สุด คือวิชาสังคมศึกษา คิดเป็นร้อยละ 9.09

2. นักศึกษาส่วนใหญ่ได้ระดับผลการเรียนใด **<u>ตอบ</u>** ผลการเรียน 1
3. ระดับผลการเรียนที่นักศึกษามีจำนวนมากที่สุดได้รับ**<u>ตอบ</u>** ผลการเรียน 1 วิชาคณิตศาสตร์
4. ระดับผลการเรียนที่นักศึกษามีจำนวนน้อยที่สุดได้รับ**<u>ตอบ</u>** ผลการเรียน 4 วิชาคณิตศาสตร์
5. กล่าวโดยสรุปถึงผลการเรียนของสถาบันแห่งนี้เป็นอย่างไร

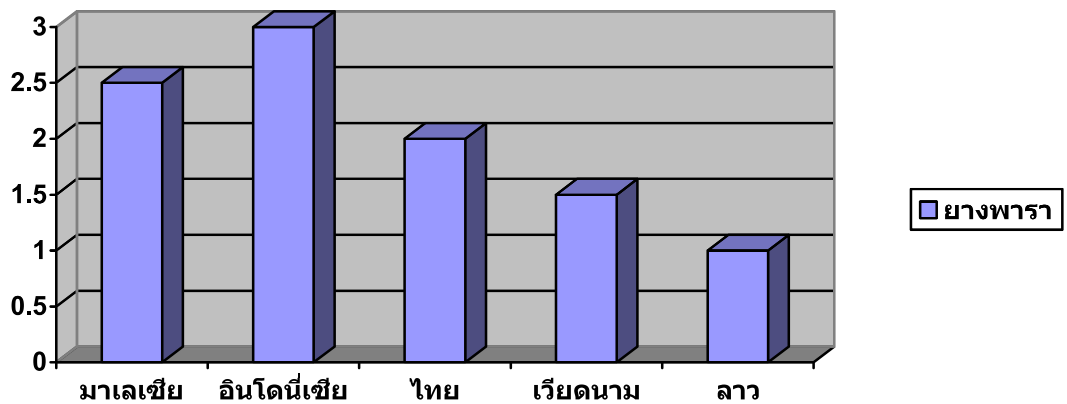
<u>ตอบ</u> สถาบันแห่งนี้นักศึกษาส่วนใหญ่จะมีระดับผลการเรียนอยู่ที่ เกรด 1 และเกรด 2 ทุกวิชา วิชาที่มีนักศึกษาสอบไม่ผ่าน (ได้เกรด 0) มากที่สุด คือ คณิตศาสตร์ รองลงมาเป็นวิทยาศาสตร์ ภาษาไทย และสังคมศึกษา

6. ตารางแสดงปริมาณผลิตยางพาราของประเภทต่าง ๆ ในปี พ.ศ. 2544 และปี พ.ศ. 2545 ดังนี้

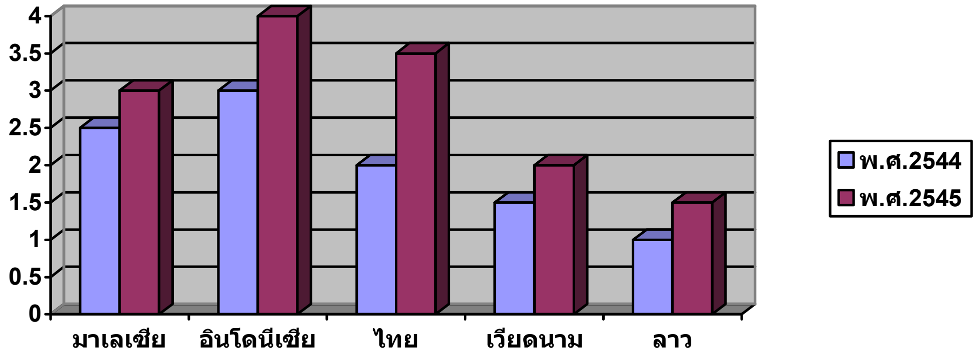
ประเทศ	ปริมาณการผลิต (ล้านตัน)	
	ปี 2544	ปี 2545
มาเลเซีย	2.5	3.0
อินโดนีเซีย	3.0	4.0
ไทย	2.0	3.5
เวียดนาม	1.5	2.0
ลาว	1.0	1.5

จงเขียน

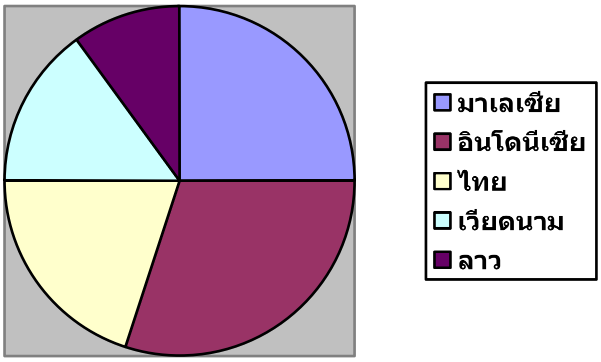
1. แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบการผลิตยางพาราของประเทศต่าง ๆ ในปี 2544



2. แผนภูมิแท่งแสดงการเปรียบเทียบการผลิตยางพาราของประเทศต่าง ๆ ในปี 2544 และในปี 2545



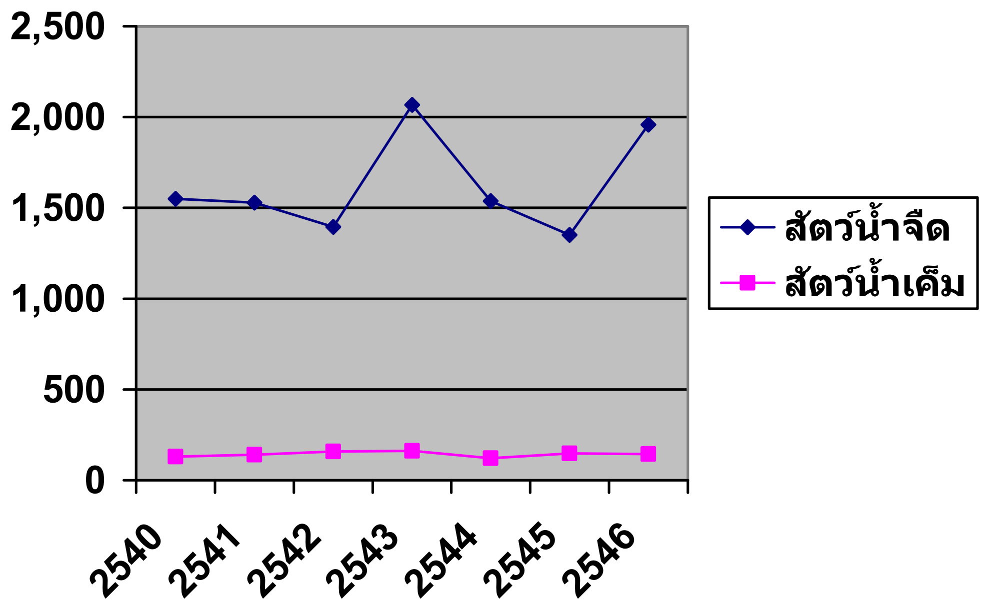
3. แผนภูมิวงกลมแสดงการเปรียบเทียบการผลิตยางพาราของแต่ละประเทศในปี 2544



4. จงเขียนกราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณสัตว์น้ำจืดและสัตว์น้ำเค็มที่จับได้ตั้งแต่ พ.ศ. 2540 ถึง พ.ศ. 2546

พ.ศ.	ปริมาณที่จับได้ (พันตัน)	
	สัตว์น้ำจืด	สัตว์น้ำเค็ม
2540	1,550	130
2541	1,529	141
2542	1,395	159
2543	2,068	161
2544	1,538	122
2545	1,352	147
2546	1,958	145

กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณสัตว์น้ำจืดและสัตว์น้ำเค็มที่จับได้ตั้งแต่พ.ศ. 2540 – 2546



แบบฝึกหัดที่ 4

1. การเลือกข้อมูลมาใช้ประกอบการตัดสินใจต้องอาศัยหลักการใดบ้าง

    1. เชื่อถือได้
    2. ครบถ้วน
    3. ทันสมัย

2. ข้อมูล ต่างกับ สารสนเทศ อย่างไร จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบด้วย

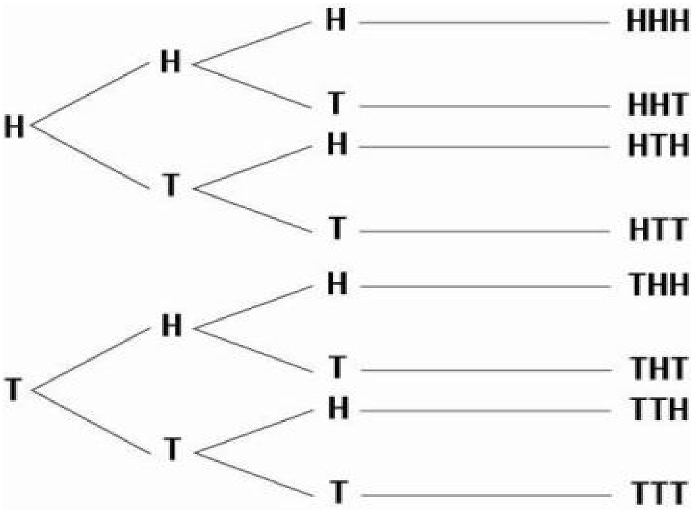
ข้อมูล หมายถึง ข้อเท็จจริง หรือเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสิ่งต่าง ๆ เช่น บุคคล สิ่งของ สถานที่ ฯลฯ ข้อมูลเป็นเรื่องเกี่ยวกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง ข้อมูลต้องถูกต้องแม่นยำ ครบถ้วนขึ้นอยู่กับผู้ดำเนินการที่ให้ความสำคัญของความรวดเร็วของการเก็บข้อมูล

สารสนเทศ เกิดจากการนำข้อมูล ผ่านระบบการประมวลผล คำนวณ วิเคราะห์และแปลความหมายเป็นข้อความที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้

เฉลย บทที่ 8
ความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัดที่ 1

1. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง จงหาจำนวนที่เหรียญจะขึ้นหน้าต่างๆ โดยวิธีเขียนแผนภูมิต้นไม้



2. ในการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย โจทย์แบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ โจทย์แต่ละข้อมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงหนึ่งตัวเลือกเท่านั้น แล้วจำนวนวิธีการตอบคำถามที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่วิธี

มี $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1{,}024$ วิธี

3. มีนักเรียน 5 คน ยืนเข้าแถวเพื่อซื้ออาหารกลางวันของร้านหนึ่ง จงหาว่าจำนวนวิธีที่ยืนเข้าแถวที่แตกต่างกันมีทั้งหมดกี่วิธี

ตอบ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

4. มีชาย 6 คน หญิง 5 คน ต้องการจัดคู่แข่งขันระหว่างชาย 1 คน หญิง 1 คนในการแข่งขันกีฬาเทนนิสมีจำนวนทั้งหมดกี่วิธี

ตอบ $6 \times 5 = 30$ วิธี

5. เพื่อน 3 คน นัดกันไปรับประทานอาหารเย็นที่ภัตตาคารและ ซื้อของที่ห้างสรรพสินค้า โดยเลือกที่จะไปรับประทานอาหารและซื้อของ ซึ่งมีภัตตาคาร 5 แห่ง และมีห้างสรรพสินค้า 4 แห่ง ทั้งสามคนนี้จะมีวิธีเลือกกระทำดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตอบ $5 \times 4 = 20$ วิธี

6. บริษัทแห่งหนึ่งเปิดรับสมัครพนักงานเข้าทำงาน โดยพิจารณาจากเงื่อนไขคือ เพศชาย หญิงระดับอายุมี 6 ระดับ และมีสาขาวิชาชีพ 10 ประเภท แล้วบริษัทนี้จะมีวิธีการจำแนกผู้สมัครได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตอบ มี 2 X 6 X 10 = 60 วิธี

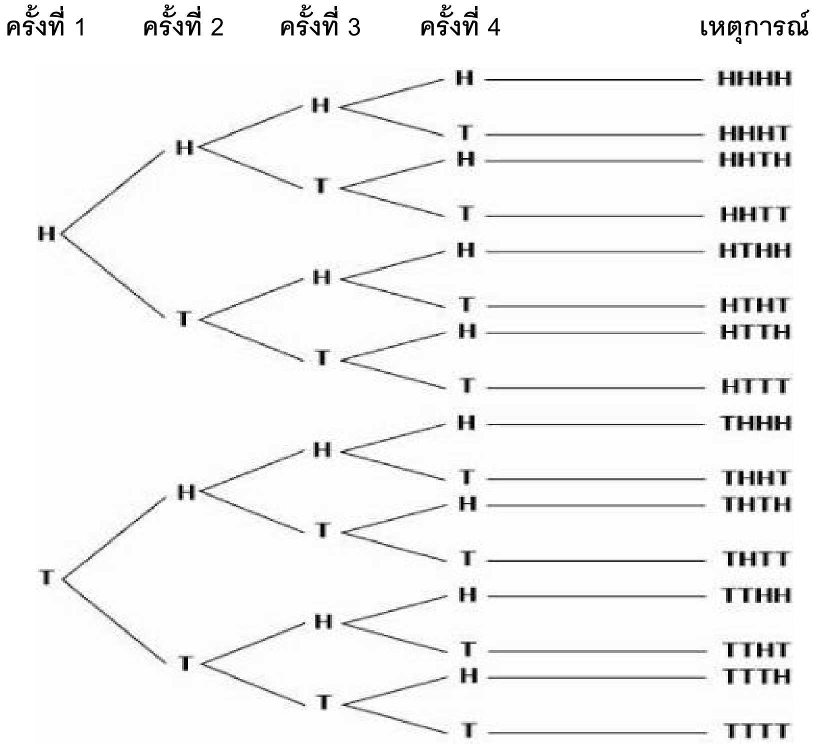
7. จากการสัมภาษณ์รับคนเข้าทำงานจำนวน 8 คน จะมีวิธีจะคัดเลือกได้พนักงานหนึ่งคนจากผู้เข้าสัมภาษณ์ทั้งหมด

ตอบ 8 วิธี

8. จงเขียนแผนภาพต้นไม้เพื่อแสดงผลที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 4 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการโยนเหรียญครั้งนี้ โดยที่

1. ไม่มีหน้าหัวเลย
2. มีหน้าหัวเพียง 1 ครั้ง
3. มีหน้าทั้ง 2 ครั้ง
4. มีหน้าหัวเพียง 3 ครั้ง
5. มีหน้าหัว 4 ครั้ง

ตอบ



1 (T,T,T,T) = 1 วิธี

2. (H,T,T,T),(T,H,T,T),(T,T,H,T),(T,T,T,H) = 4 วิธี

3. (H,H,T,T),(H,T,H,T),(H,T,T,H),(T,H,H,T)(T,H,T,H) (T,T,H,H) = 6 วิธี

4. (H,H,H,T)(H,H,T,H) (H,T,H,H) (T,H,H,H) = 4 วิธี

5. (H,H,H,H) = 1 วิธี

แบบฝึกหัดที่ 2

2. จากการทดลองสุ่มต่อไปนี้ จงเขียนแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ที่สนใจในการทดลองนั้นๆ

(1) ได้หัวสองเหรียญจากการโยนเหรียญสองอันหนึ่งครั้ง

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด (H,H) , (H,T) ,(T,H) ,(T,T)

เหตุการณ์ที่สนใจ = (H,H) = $\frac{1}{4}$

(2) ได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 2 หรือ 6 จากการโยนลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

เหตุการณ์ที่สนใจ = (1,1) (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) ,(5,1)

(3) หยิบได้สลากหมายเลข 5 หรือ 6 หรือ 7 หรือ 8 จากสลาก 10 ใบซึ่งเขียนหมายเลข 1 ถึง 10 กำกับไว้

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

เหตุการณ์ที่สนใจ = 5, 6, 7, 8

(4) ได้นักเรียนที่ถนัดมือซ้ายในห้องเรียนที่ท่านเรียนอยู่

ตอบ อยู่ในดุลยพินิจของผู้สอน

(5) ได้สลากที่มีรางวัลจากการจับสลากที่ประกอบด้วยสลากที่มีรางวัล 3 ใบ และไม่มีรางวัล 7 ใบ

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด รางวัลที่ ถ1, ถ2, ถ3, ผ1, ผ2, ผ3, ผ4, ผ5, ผ6, ผ7

เหตุการณ์ที่สนใจ คือโอกาสที่ถูกรางวัล = ถ1, ถ2, ถ3

(6) ได้คำตอบจากครอบครัว 3 ครอบครัวว่ามีจักรเย็บผ้าใช้ทั้งสามครอบครัว

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด มีมีมี, มีมีไม่, มีไม่มี, มีไม่ไม่, ไม่มีมี, ไม่มีไม่, ไม่ไม่มี, ไม่ไม่ไม่

เหตุการณ์ที่สนใจ คือมีเครื่องซักผ้าทั้ง 3 ครอบครัว มีมีมี

(7) ได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก ในการหยิบลูกบอลทีละลูกแบบไม่ใส่คืน 3 ลูก จากกล่องซึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 3 ลูก และสีดำ 2 ลูก ให้ ข แทนบอลสีขาว และ ด แทนบอลสีดำ

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด คือ ขคข, ขขค, ขคข, ขคค, คขข, ดขด, ดดข

เหตุการณ์ที่สนใจ คือ ขคข, ขขค, ขคข, คขข

(8) ได้แต้มที่เหมือนกันหรือได้แต้ม 2 จากลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก

ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
เหตุการณ์ที่สนใจ = (1,1) (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) ,(6,6)

(9) ได้หัวและแต้มที่มากกว่า 4 จากการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญและทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก หนึ่งครั้ง
ผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด (H,1) ,(H,2), (H,3),(H,4),(H,5),(H,6)
(T,1) ,(T,2), (T,3),(T,4),(T,5),(T,6)
เหตุการณ์ที่สนใจ = (H,5),(H,6)

(10) ได้สีที่ชอบคือ สีฟ้าหรือสีชมพูจากการสอบถามนางสาวสุชาดาถึงสีของกระดาษเช็ดหน้าที่ชอบสองสีจากสีทั้งหมด 5 สี คือ ขาว ฟ้า ชมพู เขียว และเหลือง
ผลที่เกิดขึ้น ขาว, ฟ้า, ชมพู, เขียว, เหลือง
เหตุการณ์ที่สนใจ ฟ้า, ชมพู

1. ถ้า S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

E_1 = { 0, 2, 4, 6, 8 }

E_2 = {1, 3 ,5 ,7 ,9 }

E_3 ={ 2, 3, 4, 5 }

และ E_4 = { 1, 6, 7 }

จงหาสมาชิกของ S ที่อยู่ในเหตุการณ์ต่อไปนี้

(2) $E_1 \cup E_3$ = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 8,} (2) $E_1 \cap E_2$ = { }

(3) E'_3 = {0, 1, 6, 7, 8, 9} (4) $(E'_3 \cap E_4) \cap E_2$ = {1}

(5) $(S \cap E_3)'$ = {0, 1, 6, 7, 8} (6) $(E'_1 \cap E'_2) \cap E'_3$ = { }

2. จากเหตุการณ์ E_1, E_2, E_3 ในข้อ 2 จงเขียนแผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์แสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $E_1 \cap E'_2$ = {0, 2, 4, 6, 8}

(2) $(E_1 \cup E_2)'$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

(3) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$

3. ในการสำรวจอายุของผู้ป่วยแผนกเด็ก (อายุไม่เกิน 15 ปี) ของโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุตั้งแต่ 1 ถึง 9 ปี

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุน้อยกว่า 5 ปี

และ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุมากกว่า 9 ปี

จงหา (1) $E_1 \cup E_2$ เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุน้อยกว่า 9 ปี

(2) $E_1 \cap E_2$ เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยที่อายุตั้งแต่ 1 ปี ถึงอายุน้อยกว่า 5 ปี

(3) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$ เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยมีอายุตั้งแต่เกิดจนตาย

(4) $E_2 \cup E_3$ เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยอายุน้อยกว่า 5 ปี และอายุมากกว่า 9 ปี

5 ในการจับสลาก 1 ใบ จากสลาก 10 ใบ ซึ่งมีเลข 0 ถึง 9 กำกับอยู่ ถ้าสนใจเลขที่เขียนกำกับไว้ในสลากใบที่จับได้ โดยให้

E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคี่

E_3 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะ

E_4 เป็นเหตุการณ์ที่เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้ในรูป E_1, E_2, E_3 หรือ E_4 พร้อมทั้งแจกแจงสมาชิกเมื่อ

(5) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่หรือคี่หรือจำนวนเฉพาะ

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(6) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะที่หารด้วย 3 ลงตัว

$E = \{ 3 \}$

(7) เลขที่เขียนกำกับไว้ไม่เป็นจำนวนคี่ และไม่เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

$E = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

(8) เลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่ที่เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวน

$E = \{ \quad \}$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และสรุปถึงโอกาสที่จะเกิดขึ้นว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด

1. ได้แต้ม 4

E แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก หงายแต้ม 4

$$P(E) = \frac{1}{6} = 0.167$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยมาก

4. ได้แต้มคู่

E แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูกได้แต้มคู่

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดขึ้นและไม่เกิดขึ้นเท่า ๆ กัน หรือมีโอกาสเกิดร้อยละ 50%

5. ได้แต้มมากกว่า 4

E แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มมากกว่า 4

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดน้อย

6. ได้แต้มน้อยกว่า 7

E แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มน้อยกว่า 7

$$P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดขึ้นแน่นอน

7. ได้แต้มมากกว่า 0

E แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มมากกว่า 0

$$P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

8. ได้แต้มมากกว่า 6 หรือเป็นแต้มคี่

E_1 แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มมากกว่า 6 หรือแต้มคี่

E_2 แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มคี่

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดขึ้น 50%

7. ได้แต้มมากกว่า 3 และเป็นแต้มคี่

E_1 แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้ม > 3

E_2 แทนเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก ได้แต้มคี่

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{6} = 0.166$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยมาก

2. ทอดลูกเต๋า 2 ลูกสองครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 7 ในครั้งแรกและได้แต้มรวมเป็น 10 ในครั้งที่ 2 เท่ากับเท่าใด

E_1 แทนการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ได้แต้มรวมเป็น 7

E_2 แทนการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ได้แต้มรวมเป็น 10

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{1}{6} = 0.166$$

เหตุการณ์นี้มีโอกาสเกิดน้อยมาก

3. ช่างก่อสร้างกลุ่มหนึ่งมี 10 คน ประกอบด้วย ช่างปูน 6 คน และช่างไม้ 4 คน ถ้าต้องการเลือกช่าง 7 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้ช่างปูน 4 คน และช่างไม้ 3 คน เท่ากับเท่าใด

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟสีแดง 6 หลอดซึ่งเป็นหลอดดี 4 หลอและหลอดไฟสีน้ำเงิน 4 หลอด ซึ่งเป็นหลอดดี 2 หลอด ในการสุ่มหยิบหลอดไฟครั้งละ 1 หลอด 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกัน และเป็นหลอดดีทั้งสองครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และสีขาวจำนวนหนึ่ง โดยที่จำนวนวิธีการหยิบลูกบอล 2 ลูก เป็นลูกบอลสีเหมือนกัน เท่ากับ 9 ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลพร้อมพัน 2 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 2 ลูกเท่ากับเท่าใด

เฉลย บทที่ 9

การใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในงานอาชีพ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. ศุภางค์ได้รับเงินเดือน ๆ ละ 9,000 บาท

กำหนดเวลาทำงานตามปกติวันละ 8 ชั่วโมง

ดังนั้น ศุภางค์จะมีรายได้วันละ $\frac{9{,}000}{30} = 300$ บาท

และศุภางค์มีรายได้ชั่วโมงละ $\frac{300}{8} = 37.50$ บาท

2.

เดือนธันวาคม						
อาทิตย์	**จันทร์**	**อังคาร**	**พุธ**	**พฤหัส**	**ศุกร์**	**เสาร์**
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

เดือนธันวาคม สุภาพได้รับค่าจ้างในวันทำงาน 19 วัน

และมีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดตามปกติ 3 วัน

และได้ค่าจ้างวันละ 370 บาท

ดังนั้น สุภาพได้รับค่าจ้างเดือนธันวาคม $= (19 + 3) \times 370$

$= 8{,}140$ บาท

3.

เดือนสิงหาคม						
อาทิตย์	**จันทร์**	**อังคาร**	**พุธ**	**พฤหัส**	**ศุกร์**	**เสาร์**
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

ธิดามีรายได้เดือนละ 12,000 บาท ทำงานวันละ 8 ชั่วโมง

ค่าจ้างที่ได้รับชั่วโมงละ $= \dfrac{12{,}000}{8 \times 30} = 50$ บาท

ธิดามีสิทธิได้รับค่าจ้างในวันหยุดทุกประเภท จึงได้รับค่าจ้าง เมื่อมาทำงานในวันหยุดตามประเพณี อีก 1 เท่า ทำงานในวันหยุดตามประเพณี 1 วัน ๆ ละ 8 ชั่วโมง

ดังนั้น ทำงานในวันหยุดคิดเป็น 8 ชั่วโมง

ธิดาได้รับค่าจ้างในวันหยุด $= 1 \times 50 \times 8$

$= 400$ บาท

ทำงานวันเสาร์ ซึ่งเป็นวันหยุดประจำสัปดาห์ จะได้รับค่าทำงานในวันหยุด 2 เท่า ของค่าจ้างในวันทำงาน

ทำงานวันเสาร์ 4 วัน ๆละ 3 ชั่วโมง $= 4 \times 3$

$= 12$ ชั่วโมง

ดังนั้น จะได้รับค่าจ้างในวันเสาร์ $= 2 \times 50 \times 12$

$= 1{,}200$ บาท

จะได้รับค่าทำงานในวันหยุดทั้งสิ้น $= 400 + 1{,}200$

$= 1{,}600$ บาท

และจะได้รับค่าจ้างทั้งหมดของเดือนสิงหาคม $= 12{,}000 + 1{,}600$

$= 13{,}600$ บาท

4.

บัญชีแสดงรายรับ – รายจ่ายของ..................................

ใน 1 สัปดาห์

วัน เดือน ปี	รายการรับ	จำนวนเงิน		วัน เดือน ปี	รายการจ่าย	จำนวนเงิน	
		บาท	สต.			บาท	สต.
6 พ.ย. 54	รับเงินค่าจ้างจากการ	2,100	-	6 พ.ย. 54	ค่ารถประจำทาง	44	-
	ทำงาน 1 สัปดาห์				ค่าอาหาร	120	-
	วันละ 300 บาท เป็นเงิน			7 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	120	-
					ค่าโทรศัพท์	100	-
				8 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	120	-
					ค่าน้ำ ค่าไฟฟ้า	150	-
				9 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	100	-
				10 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	110	-
					ค่าหนังสือ	50	-
				11 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	150	-
					ค่าเสื้อผ้า	299	-
				12 พ.ย. 54	ค่ารถ	44	-
					ค่าอาหาร	115	-
					ค่าโทรศัพท์	50	-
	รวมรายรับ	2,100	-		รวมรายจ่าย	1,792	-
					ยอดคงเหลือยกไป	308	-

5. ค่านายหน้าในการขาย $= \frac{30}{100} \times 45{,}000$

$= 13{,}500$ บาท

ดังนั้น อัญชลีได้เงินค่านายหน้า 13,500 บาท

6. เงินปันผลต่อหุ้นของหุ้นบุริมสิทธิ = อัตราเงินปันผล × มูลค่าหุ้นบุริมสิทธิ

$= 5\% \times 160$

$= \frac{5}{10\cancel{0}} \times 16\cancel{0}$

$= 8$ บาท

แต่พจมานมีหุ้นบุริมสิทธิทั้งหมด 1,500 หุ้น

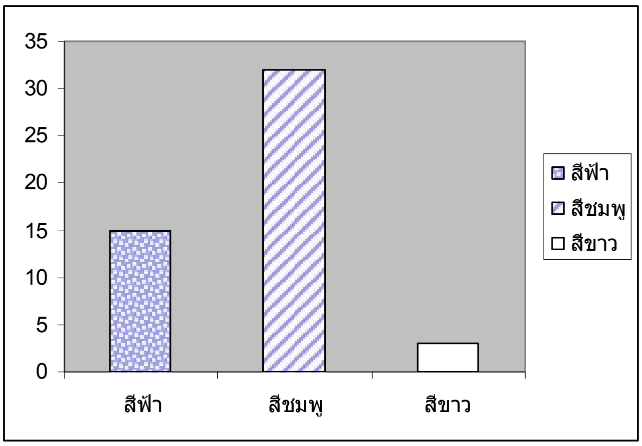
ดังนั้น พจมานจะได้เงินปันผลทั้งสิ้น $= 8 \times 1{,}500 = 12{,}000$ บาท

7. สุภัทราได้ดำเนินการ ดังนี้

1. สุ่มกลุ่มตัวอย่างวัยรุ่น จำนวน 50 คน
2. สอบถามกลุ่มตัวอย่างทั้ง 50 คน เรื่องสีของขวดบรรจุแชมพูได้ข้อสรุปดังนี้

สี	ความถี่
สีฟ้า	15
สีชมพู	32
สีขาว	3
รวม	50

3. เนื่องจากเป็นการสำรวจความนิยมของกลุ่มตัวอย่าง ถ้าเป็นค่าสถิติที่ใช้ คือ ค่าฐานนิยม (Mode) จากแบบฝึกหัด ค่าฐานนิยม คือ สีชมพู เพราะกลุ่มตัวอย่างนิยมมากที่สุด (ความถี่ = 32)
4. นำข้อมูลจากข้อ 2 มานำเสนอโดยใช้แผนภูมิแท่ง



8. **วิธีทำ** นายศักดิ์มีเงินได้พึงประเมิน = 25,000 $\times$ 12 = 300,000 บาท

หัก ค่าใช้จ่ายได้ร้อยละ 40 ของเงินได้พึงประเมินแต่ไม่เกิน 60,000 บาท

ค่าใช้จ่าย $\frac{40}{100} \times 300{,}000 = 120{,}000$ บาท

แต่ค่าใช้จ่ายของนายศักดิ์คำนวณได้ 120,000 บาท แต่สามารถหักได้แค่ 60,000 บาทเท่านั้น

หัก ค่าลดหย่อน

ผู้มีเงินได้ 30,000 บาท

ค่าเบี้ยประกันชีวิต 50,000 บาท

ค่าเบี้ยประกันสุขภาพของมารดานายศักดิ์ 20,000 บาท

รวมหักค่าลดหย่อนได้ = 30,000 + 50,000 + 20,000 = 100,000 บาท

เงินได้สุทธิของนายศักดิ์ = เงินได้พึงประเมิน – (หักค่าใช้จ่าย + หักค่าลดหย่อน)

= 300,000 – (60,000 + 100,000)

= 140,000 บาท

ตามตารางอัตราการเสียภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

เงินได้ 0 – 150,000 บาท ไม่ต้องเสียภาษีเงินได้

$\therefore$ นายศักดิ์ไม่ต้องเสียภาษี เพราะมีเงินได้สุทธิ 140,000 บาท ได้รับการยกเว้นภาษี แต่ต้องยื่นแบบแสดงรายการภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา (ภ.ง.ด. 91)

9. **วิธีทำ** พื้นที่แผ่นไวทิลที่ใช้โฆษณา = กว้าง $\times$ ยาว

= 0.9 $\times$ 1.8 = 1.62 ตารางเมตร

ค่าจัดทำ = 1.62 $\times$ 250 = 405 บาท

$\therefore$ จะต้องจ่ายเงินทั้งหมด = ค่าจัดทำ + ค่าออกแบบ

= 405 + 500 = 905 บาท

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

1.	นายประเสริฐ	บุญเรือง	เลขาธิการ กศน.
2.	ดร.ชัยยศ	อิ่มสุวรรณ์	รองเลขาธิการ กศน.
3.	นายวัชรินทร์	จำปี	รองเลขาธิการ กศน.
4.	ดร.ทองอยู่	แก้วไทรฮะ	ที่ปรึกษาด้านการพัฒนาหลักสูตร กศน.
5.	นางรักขณา	ตัณฑวุฑโฒ	ผู้อำนวยการกลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

ผู้เขียนและเรียบเรียง

1.	นายไชโย	ม่วงบุญมี	ข้าราชการบำนาญ
2.	นางสาวกรุณา	ตติยรัตนาภรณ์	ข้าราชการบำนาญ

ผู้บรรณาธิการ และพัฒนาปรับปรุง

1.	นายชุมพล	หนูสง	ข้าราชการบำนาญ
2.	นายไชโย	ม่วงบุญมี	ข้าราชการบำนาญ
3.	นางสาวสิรินธร	นาคคุ้ม	สำนักงาน กศน. จ.สมุทรสาคร
4.	นางสาวบีบีฮารา	สะมัท	สำนักงาน กศน. จ.สมุทรสาคร
5.	นายสุรพงษ์	มั่นมะโน	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
6.	นางพรทิพย์	กล้ารบ	ข้าราชการบำนาญ

คณะทำงาน

1.	นายสุรพงษ์	มั่นมะโน	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
2.	นายศุภโชค	ศรีรัตนศิลป์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
3.	นางสาววรรณพร	ปัทมานนท์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
4.	นางสาวศริญญา	กุลประดิษฐ์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
5.	นางสาวเพชรินทร์	เหลืองจิตวัฒนา	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

ผู้พิมพ์ต้นฉบับ

นางสาวเพชรินทร์	เหลืองจิตวัฒนา	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

ผู้ออกแบบปก

นายศุภโชค	ศรีรัตนศิลป์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

คณะผู้พัฒนาและปรับปรุงครั้งที่ 2

ที่ปรึกษา

1. นายประเสริฐ	บุญเรือง	เลขาธิการ กศน.
2. ดร.ชัยยศ	อิ่มสุวรรณ์	รองเลขาธิการ กศน.
3. นายวัชรินทร์	จำปี	รองเลขาธิการ กศน.
4. นางวัทนี	จันทร์โอกุล	ผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านพัฒนาสื่อการเรียนการสอน
5. นางชุลีพร	ผาตินินนาท	ผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านเผยแพร่ทางการศึกษา
6. นางอัญชลี	ธรรมวิธีกุล	หัวหน้าหน่วยศึกษานิเทศก์
7. นางศุทธินี	งามเขตต์	ผู้อำนวยการกลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

ผู้พัฒนาและปรับปรุงครั้งที่ 2

1. นางจารุพร	พุทธวิริยากร	ศูนย์เทคโนโลยีทางการศึกษา
2. น.ส.วรวรรณ	เบ็ญจนิรัตน์	ข้าราชการบำนาญ สำนักงาน กศน.
3. นางพรรณทิพา	ชินชัชวาล	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
4. น.ส.เบ็ญจวรรณ	อำไพศรี	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน
5. นางสาวปิยวดี	คะเนสม	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน

คณะผู้ปรับปรุงข้อมูลเกี่ยวกับสถาบันพระมหากษัตริย์ปี พ.ศ. 2560

ที่ปรึกษา

1. นายสุรพงษ์	จำจด	เลขาธิการ กศน.
2. นายประเสริฐ	หอมดี	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ปฏิบัติหน้าที่รองเลขาธิการ กศน.
3. นางตรีนุช	สุขสุเดช	ผู้อำนวยการกลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบ และการศึกษาตามอัธยาศัย

ผู้ปรับปรุงข้อมูล

นางสาวเนาวรัตน์	ทิพย์ไสยาษ	กศน.เขตราชเทวี

คณะทำงาน

1. นายสุรพงษ์	มั่นมะโน	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
2. นายศุภโชค	ศรีรัตนศิลป์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
3. นางสาวเบ็ญจวรรณ	อำไพศรี	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
4. นางเยาวรัตน์	ปิ่นมณีวงศ์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
5. นางสาวสุลาง	เพ็ชรสว่าง	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
6. นางสาวทิพวรรณ	วงค์เรือน	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
7. นางสาวนภาพร	อมรเดชาวัฒน์	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
8. นางสาวชมพูนท	สังข์พิชัย	กลุ่มพัฒนาการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

ออกแบบปก : ศุภโชค ศิริรัตนศิลป์